

非対称性のある多変量確率的ボラティリティ変動モデルの ベイズ分析：東証業種別株価指数への応用

石原 庸博*・大森 裕浩†

Bayesian Analysis of Asymmetric Multivariate Stochastic Volatility Models with Applications to TOPIX sector indices

Tsunehiro Ishihara* and Yasuhiro Omori†

非対称性を考慮した多変量確率的ボラティリティ変動モデルの 2 つのクラスを東京証券取引所の業種別種別株価指数収益率に応用し、それらのモデル比較を行う。第 1 のクラスは一変量モデルの直接の拡張であり、収益率間の交差非対称性を考慮したモデルである。第 2 のクラスは多変量の因子を用いたモデルで、各系列・各因子が非対称性を持つ一変量モデルに従うモデルである。まずこれらのモデルのための、効率的なマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法を説明し、次に効率的な粒子フィルタを用いた尤度関数の推定法も提案する。そして実証分析では情報量基準 DIC を用いたモデル比較を行う。その結果、因子を用いない定式化の方がよいという結果を得た。また正規分布よりも裾の厚い分布を仮定し、非対称性の存在を仮定しているモデルが DIC の意味で総じてよいという結果が得られた。

Two classes of multivariate stochastic volatility models with volatility asymmetry are considered and their model comparison is conducted using return series of TOPIX (Tokyo Stock Exchange Stock Price Index) Sector indices. The models of the first class are straight forward extensions of the univariate model with cross asymmetric effects. Those of the second class are based on factor specifications where each factor and disturbance series follow stochastic volatility models with asymmetry. Computationally efficient Markov chain Monte Carlo algorithms are described, and efficient particle filtering methods are also proposed to estimate the likelihood. In the empirical study, the model comparison is conducted based on the deviance information criterion. The models of the first class are found to outperform those of the second class. Moreover, those models with heavy-tailed distribution or asymmetric volatility are shown to outperform other simple models in terms of DIC in general.

キーワード：多変量確率的ボラティリティ、因子モデル、裾の厚い分布、非対称性、ベイズ推測、マルコフ連鎖モンテカルロ法、ブロック・サンプラー、株価収益率、補助粒子フィルタ、DIC.

1. はじめに

危険資産の収益率時系列のモデルとして、確率的ボラティリティ変動モデル (Stochastic Volatility model) は広く使用されている。一変量モデルにおいては、他の GARCH (gen-

* 東京大学経済学研究科: 〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1 (E-mail: tishr@e.u-tokyo.ac.jp).

† 東京大学経済学研究科: 〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1 (E-mail: omori@e.u-tokyo.ac.jp).

eralized autoregressive conditional heteroschedasticity) モデルなどと比較してデータへの当てはまりがよいことが知られている (詳しくは渡部 (2000), Shephard (2005) などを参照されたい). その結果に基づき多変量に拡張されたモデルについても近年では多くの研究がなされており, 数多くのモデルが提案されている (詳しくは多変量 GARCH に関しては Bauwens *et al.* (2006), Silvennoinen and Terrasvirta (2007), 多変量確率的ボラティリティ変動モデルに関しては Asai *et al.* (2006), Chib *et al.* (2009) らのサーベイとその参考文献を参照されたい).

特に株価や株価指数の収益率系列にはレバレッジ効果 (leverage effect), もしくはより広い概念として, ボラティリティの非対称性 (asymmetry) と呼ばれる性質の存在が知られている. これは, 株価のショックが上側か下側か, つまり収益率へのショックが正か負かによって次の日のボラティリティの変動が異なるというもので, 株価収益率のモデル化において重要な性質である. 多くの研究では特に株価の下がった次の日のボラティリティが大きくなるという結果が得られている.

実証分析でしばしば扱われる対数線形型の一変量非対称確率的ボラティリティ変動モデルは, 以下のように定式化される. 時点 $t = 1, \dots, n$ での資産収益率を y_t とすると,

$$\begin{aligned} y_t &= \exp(\alpha_t/2)\varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n, \\ \alpha_{t+1} &= \phi\alpha_t + \eta_t \quad t = 2, \dots, n-1, \\ \alpha_1 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2/(1-\phi^2)), \quad |\phi| < 1, \\ (\varepsilon_t, \eta_t)' &\sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \rho\sigma_\varepsilon\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\varepsilon\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ は平均 μ , 分散共分散行列 Σ の p 次元正規分布であり, $p = 1$ のときは p を省略する. 推定法によつては $\alpha_t = h_t - \mu$, $\mu = \log(\sigma_\varepsilon^2)$ と記述する場合も多い. 確率変数 α_t はボラティリティの変動をあらわす潜在変数であり, ここでは定常な自己回帰過程に従うと仮定している. 相関係数 ρ は非対称性を表し, 多くの研究では $\rho < 0$ と推定されている. つまり株価に対する予期されないショック ε_t が負のときに $t+1$ 時点のボラティリティ $\exp(\alpha_{t+1}/2)\sigma_\varepsilon$ が大きくなることが知られている.

確率的ボラティリティ変動モデルを多変量に拡張する場合には様々なモデルが提案されている. 直接的な拡張としては次元 p の収益率のベクトルを $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{pt})'$ としたときに自己回帰過程をベクトル自己回帰過程に拡張し,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{V}_t^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (1.2)$$

のように拡張することである. ここで $\mathbf{V}_t = \text{diag}(\exp(\alpha_{1t}), \dots, \exp(\alpha_{pt}))'$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{1t}, \dots,$

α_{pt})' であり Φ の最大固有値の絶対値が 1 より小さいと仮定する。収益率の相関係数は時間を通じて一定であるが、高次元の場合には計算上の都合でさらに各パラメータの行列に何らかの制約を置くことが実際には多い。非対称性のあるケースにおける制約に関しては、例えば Asai *et al.* (2006) でサーベイが行われている。

一方で計算負荷の問題から、高次元のデータを扱う場合に因子構造を導入したモデルも数多く提案されている。特に Pitt and Shephard (1999) は収益率の式を

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (1.3)$$

とし、 q 次元の因子ベクトル \mathbf{f}_t と p 次元の誤差項ベクトル $\boldsymbol{\omega}_t$ のそれぞれに独立な一変量の確率的ボラティリティ変動モデルを仮定して収益率の相関の時間を通じた変動を導入した。ここで \mathbf{B} は $p \times q$ 次元の因子負荷行列である。このモデルは、Chib *et al.* (2006) らにより裾の厚い分布の場合に拡張され、大森 (2007) によって非対称性を持つ場合に拡張された。特に Chib *et al.* (2006) では 40 次元以上のデータでの推定が行われており、高次元の収益率のデータ解析を行う上で非常に重要なモデルとなっており、その拡張に関する研究も盛んである。

他にも Wishart 分布を用いた定式化 (Philipov and Glickman (2006), Gouriéroux *et al.* (2009)), 行列値 Levy 過程を用いたモデル化 (Pigorsch and Stelzer (2009)) など様々な確率的ボラティリティ変動の定式化があるものの、現状では上記の対数線形型のモデルに関する実証研究が多い。また相関一定の多変量 GARCH, 因子 ARCH モデルの非対称性への拡張は Kroner and Ng (1998) で提案されている。しかしながら、前者の多変量確率的ボラティリティ変動モデルでは相関が一定であるという仮定が制約的である可能性がある一方、因子構造の仮定も強すぎる可能性がある。より簡便なモデルでは Yu and Meyer (2006) が DIC (Deviance Information Criterion, Spiegelhalter *et al.* (2002)) を用いて比較を行っているが、その後の研究により得られた、非対称性を考慮した一般的なモデルに関するモデル比較の研究は行われていない。そこで本研究では、現在提案されている中で、最も一般的な相関一定のモデルである、交差非対称性、もしくは交差レバレッジ効果を考慮した多変量非対称確率的ボラティリティ変動モデル (Ishihara and Omori (2011)) と、非対称性を因子モデルに導入した多変量非対称因子確率的ボラティリティ変動モデル (大森 (2007)) とその特殊な場合であるいくつかのモデルを用いてモデル比較を行う。ここで交差非対称性とは、ある系列の収益率が負になった次の日に別の系列のボラティリティが上がる (もしくは下がる) という性質を意味しており、Tanizaki and Hamori (2009) が日経平均、ダウ・ジョーンズ工業平均、FTSE100 種総合株価指数の間に、谷崎 (2010) が日本の株価、国債金利、為替の 3 系列で同様の変動を推定している。

確率的ボラティリティ変動モデルは多くの潜在変数を持つため、尤度の計算には多重積

分が必要になる。そこで推定にはマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 法を用いたベイズ推定が行われることが多い。しかしながら MCMC 法を用いたベイズ推定を行う場合に、ポラティリティを表す潜在変数の自己相関パラメータが高いため、そのサンプリングが非効率になる場合がある。最初に一変量確率的ポラティリティ変動モデルの MCMC 法を用いたベイズ推定を行った Jacquier *et al.* (1994) では、他の潜在変数を固定して、ある潜在変数をサンプリングしようとする、いわゆるシングルムーブサンプラー (single move sampler) が提案された。しかし、シングルムーブサンプラーでは MCMC 標本の自己相関の減衰が遅いことが知られており、実行は簡単であるものの、計算時間等の面で問題がある。そのため、隣り合った複数の潜在変数を一度に、さらに潜在変数そのものではなく、誤差項をサンプリングするアルゴリズムの研究がさかんに行われてきた。一変量モデルにおいては、Kim *et al.* (1998) らにより提案された混合サンプラー (mixture sampler) という既知の混合分布を用いた正規線型近似モデルを使い事後標本を得て、それを修正する方法がもっとも効率が良いサンプリング手法の一つであることが知られている。この手法はレバレッジのある場合に Omori *et al.* (2007) により拡張されたものの、一般の多変量モデルには使うことができない。確率的ポラティリティ変動モデルが属するより一般のクラスである非線形非ガウスの観測方程式を持つ状態空間モデルに対しては、ブロックに分けた潜在変数の誤差項の事後分布からのサンプリングを行うマルチムーブサンプラー (multi-move sampler) もしくはブロックサンプラー (block-sampler) と呼ばれるアルゴリズムが Shephard and Pitt (1997) により提案されている。このアルゴリズムはシングルムーブサンプラーと比較して効率的であることが知られており、後に Watanabe and Omori (2004) らによって修正され、状態変数の事後分布が多峰形の場合に So (2006) により、また観測方程式と状態方程式の誤差項同士に相関があり、どちらも非線形非ガウスである最も一般的な場合に Omori and Watanabe (2008) によって拡張されている。多変量非対称確率的ポラティリティ変動モデルに関しては、Ishihara and Omori (2011) がブロックサンプラーを適用している。一方で、多変量因子確率的ポラティリティ変動モデルではモデルの構造上、一変量モデルでの推定法を用いることができる。Chib *et al.* (2006) では混合サンプラーを提案しているものの、サンプリング後の再重みづけ (reweighting) の手法が未だ確立していない。そこで本研究では、両モデルの推定にはブロックサンプラーを用いたベイズ推定を用いる。

以下第2節では交差非対称性のある多変量非対称確率的ポラティリティ変動モデル、第3節では多変量非対称因子確率的ポラティリティ変動モデルを導入し、それぞれ推定のための MCMC のアルゴリズムを紹介する。第4節ではモデル選択基準 DIC とその計算に用いる粒子フィルタに関して議論する。特に多変量因子確率的ポラティリティ変動モデルに対しては新たに効率的な手法を提案する。第5節では株価指数を用いた実証分析を行い、

データに基づいてモデル比較を行う。

2. 交差非対称性のある多変量確率的ボラティリティ変動モデル

本節では、Ishihara and Omori (2011) で提案された交差非対称性のある多変量非対称確率的ボラティリティ変動モデルと大森 (2007) で提案されたレバレッジ効果のある多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルを若干単純化したモデルに関してその詳細と推定法を紹介する。

2.1 モデルの定式化

Ishihara and Omori (2011) で提案された多変量非対称確率的ボラティリティ変動モデルはモデル (1.1), (1.2) に $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p)$ を仮定したものである。 p 次元収益率ベクトル $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{pt})'$, p 次元潜在変数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_t = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{pt})'$ を用いて、

$$\mathbf{y}_t = \lambda_t^{-1/2} \mathbf{V}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \Phi \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \Sigma_0), \quad (2.3)$$

とする、ここで

$$\mathbf{V}_t = \text{diag}(\exp(\alpha_{1t}), \dots, \exp(\alpha_{pt})), \quad (2.4)$$

$$\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p), \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}_{2p}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} & \Sigma_{\varepsilon\eta} \\ \Sigma_{\eta\varepsilon} & \Sigma_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\lambda_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{G}(\nu/2, \nu/2), \quad (2.7)$$

である。ただし $\mathcal{G}(a, b)$ は平均 a/b で分散 a/b^2 のガンマ分布を意味する。潜在変数 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$, $\{\boldsymbol{\eta}_t\}_{t=1}^{n-1}$ と独立で多変量 Student t 分布を混合分布により表すための潜在変数である。初期値の分散 Σ_0 はその (i, j) 要素が $\Sigma_{\eta\eta}$ の (i, j) 要素を $1 - \phi_i \phi_j$ で割ったもので、 $\Sigma_0 = \Phi \Sigma_0 \Phi + \Sigma_{\eta\eta}$ を満たす、定常分布の分散である。

尤度関数は $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ として

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{\alpha}_1 | \phi, \Sigma) \prod_{t=1}^{n-1} f(\mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \boldsymbol{\alpha}_t, \phi, \Sigma, \nu, \lambda_t) f(\lambda_t | \nu) f(\mathbf{y}_n | \boldsymbol{\alpha}_n, \phi, \Sigma, \nu, \lambda_n) f(\lambda_n | \nu) \\ & \propto \exp \left\{ \sum_{t=1}^n l_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_1' \Sigma_0^{-1} \boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \Phi \boldsymbol{\alpha}_t)' \Sigma_{\eta\eta}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \Phi \boldsymbol{\alpha}_t) \right\} \\ & \quad \times |\Sigma_0|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n-1}{2}} |\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right\}^n \prod_{t=1}^n \lambda_t^{\frac{\nu+p-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n \lambda_t}{2} \nu \right\}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

と書くことができる。ただしここで

$$l_t = \text{const} - \frac{1}{2} \mathbf{1}'_p \boldsymbol{\alpha}_t - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t), \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{V}_t^{1/2} \mathbf{m}_t, \quad \boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{V}_t^{1/2} \mathbf{S}_t \mathbf{V}_t^{1/2}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{m}_t = \lambda_t^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \Phi \boldsymbol{\alpha}_t) I(t < n), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{S}_t = \lambda_t^{-1} (\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} - \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} I(t < n)), \quad (2.12)$$

としている。関数 $I(\cdot)$ は指示関数である。本稿ではモデル比較において、いくつかの特殊ケースについても考慮するが、各モデルを以下のように呼称する。

MASVt : 非対称性を考慮した t 分布を誤差項に持つモデル。

MASVn : MASVt モデルで誤差項が正規分布の ($\lambda_t \equiv 1, t = 1, \dots, n$ とした) モデル。

MSVt : MASVt モデルで非対称性を考えない ($\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \equiv \mathbf{O}$ とした) モデル。

MSVn : MSVt モデルで誤差項が正規分布の ($\lambda_t \equiv 1, t = 1, \dots, n$ とした) モデル。

また、以上のモデルを合わせて MSV モデルと総称する。

2.2 MCMC を用いたベイズ推定

MASVt モデルでは、パラメータに関する事前分布を以下のように仮定する。

$$\frac{\phi_j + 1}{2} \sim \mathcal{B}(a_j, b_j), \quad j = 1, \dots, p, \quad \boldsymbol{\Sigma} \sim \mathcal{IW}(n_0, \mathbf{R}_0), \quad \nu \sim \mathcal{G}(m_0^\nu, S_0^\nu).$$

ここで $\mathcal{B}(a_j, b_j)$ と $\mathcal{IW}(n_0, \mathbf{R}_0)$ はそれぞれ

$$\pi(\phi_j) \propto (1 + \phi_j)^{a_j - 1} (1 - \phi_j)^{b_j - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.13)$$

$$\pi(\boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n_0 + p + 1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{R}_0^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right\}, \quad (2.14)$$

の確率密度関数を持つベータ分布と逆 Wishart 分布である。また、特に MSVt, MSVn モデルに関しては $\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} = \mathbf{O}$ とするために

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\varepsilon} \sim \mathcal{IW}(n_0^\varepsilon, \mathbf{R}_0^\varepsilon), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta} \sim \mathcal{IW}(n_0^\eta, \mathbf{R}_0^\eta),$$

とおく。 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}'_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}'_n)'$ とおき $Y_n = \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^n$ とすると、事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\lambda}, \nu, \boldsymbol{\alpha} | Y_n) &\propto f(\boldsymbol{\alpha}_1 | \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Sigma}) \prod_{t=1}^{n-1} f(\mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda_t) f(\mathbf{y}_n | \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda_n) f(\lambda | \nu) \\ &\times \prod_{j=1}^p \pi(\phi_j) \pi(\boldsymbol{\Sigma}) \pi(\nu), \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。事後分布からのマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたサンプリング方法は、効率的な方法が Ishihara and Omori (2011) で提案されているため、詳細はここでは省略して補論にのせる。マルコフ連鎖モンテカルロ法のベイズ統計学・ベイズ計量経済学への応用に関しては Chib (2001), 大森 (2001), 伊庭他 (2005), 和合 (2005), 中妻 (2007), 小西他 (2008), 古澄 (2009) などを参照されたい。

3. 多変量非対称性因子確率的ボラティリティ変動モデル

3.1 モデルの定式化

大森 (2007) で提案されたモデルは (1.3) の収益率の方程式にジャンプ項と誤差項 t 分布を仮定した Chib *et al.* (2006) のモデルを拡張しているが、ここでは、ジャンプ項のない若干単純化した以下のモデルを考える。観測される収益率の p 次元のベクトルを $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{pt})'$ としその変動が q 次元の因子 \mathbf{f}_t により駆動されていると仮定する。収益率と因子のボラティリティの変動を表す $p+q$ 次元の潜在変数を $\boldsymbol{\alpha}_t = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{p+q,t})'$ とすると、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \lambda_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{1t}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{V}_{2t}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{2t}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (3.3)$$

$$\alpha_{j1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2 / (1 - \phi_j^2)), \quad j = 1, \dots, p+q, \quad (3.4)$$

$$\lambda_t \sim \mathcal{G}(\nu/2, \nu/2), \quad (3.5)$$

ここで $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}'_{1t}, \boldsymbol{\varepsilon}'_{2t})' = ((\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{pt}), (\varepsilon_{p+1,t}, \dots, \varepsilon_{p+q,t}))'$, $\mathbf{V}_t = \text{diag}(\mathbf{V}_{1t}, \mathbf{V}_{2t})$ であり、

$$\mathbf{V}_{1t} = \text{diag}(\exp(\alpha_{1t}), \dots, \exp(\alpha_{pt})), \quad \mathbf{V}_{2t} = \text{diag}(\exp(\alpha_{p+1,t}), \dots, \exp(\alpha_{p+q,t})),$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_{p+q}),$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}_{2(p+q)}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\varepsilon}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, n,$$

とする。多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルでは因子と誤差が独立な一変量確率的ボラティリティ変動モデルに従うように分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に、

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{diag}(\sigma_{1\varepsilon}^2, \dots, \sigma_{p+q,\varepsilon}^2), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} = \text{diag}(\sigma_{1\eta}^2, \dots, \sigma_{p+q,\eta}^2)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\eta}} = \text{diag}(\rho_{1\varepsilon}\sigma_{1\varepsilon}\sigma_{1\eta}, \dots, \rho_{p+q,\varepsilon}\sigma_{p+q,\varepsilon}\sigma_{p+q,\eta}).$$

という制約をおく。さらに因子負荷行列 \mathbf{B} については Chib *et al.* (2006) に従い、識別性のために

$$b_{ij} = 0, \quad i < j, \quad i \leq q,$$

$$b_{ii} = 1, \quad i \leq q,$$

という制約を置き、残りの自由に動けるパラメータを縦に並べた $r = q(q-1)/2 + (p-q)qI$ ($p > q$) 次元ベクトルを β とする. さらに β_j を行列 \mathbf{B} の第 j 行の自由に動けるパラメータとし, $\beta_2 = \beta_{21}$, $\beta_3 = (\beta_{31}, \beta_{32})'$, ..., $\beta_q = (\beta_{q1}, \beta_{q2}, \dots, \beta_{q,q-1})'$, $\beta_{q+1} = (\beta_{q+1,1}, \beta_{q+1,2}, \dots, \beta_{q+1,q})'$, ..., $\beta_p = (\beta_{p1}, \beta_{p2}, \dots, \beta_{pq})'$ とする. ここで, β_j の次元を r_j とする.

収益率のモデルの誤差項が従う分布は混合分布で表現した多変量 t 分布であり, モデルのパラメータは $\beta, \phi = (\phi_1, \dots, \phi_{p+q})'$,

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_{j\varepsilon}^2 & \rho_j \sigma_{j\varepsilon} \sigma_{j\eta} \\ \rho_j \sigma_{j\varepsilon} \sigma_{j\eta} & \sigma_{j\eta}^2 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, p+q,$$

と ν である. このとき尤度関数は

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 | \phi, \Sigma) \prod_{t=1}^{n-1} f(\mathbf{y}_t, \mathbf{f}_t, \alpha_{t+1} | \beta, \phi, \Sigma, \alpha_t, \lambda_t) f(\lambda_t | \nu) \\ & \propto \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{p+q} (1 - \phi_j^2) \sigma_{j,\eta\eta}^{-2} \alpha_{j1}^2 + \sum_{t=1}^n \left(\sum_{j=1}^{p+q} \alpha_{jt} \right) + \mathbf{v}'_t (\mathbf{P}_t \Sigma \mathbf{P}'_t)^{-1} \mathbf{v}_t \right\} \quad (3.6) \\ & \times \prod_{j=1}^{p+q} \sqrt{(1 - \phi_j^2)} |\Sigma_{\eta\eta}|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|^{-\frac{1}{2}} |\Sigma|^{-\frac{(n-1)}{2}} \left\{ \frac{(\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right\}^n \\ & \times \left(\prod_{t=1}^n \lambda_t \right)^{\frac{\nu+p}{2} - 1} \exp \left\{ - \frac{\sum_{t=1}^n \lambda_t}{2} \nu \right\}, \\ & \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{f}_t \\ \alpha_{t+1} - \Phi \alpha_t \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, n-1, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_n \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix}, \quad (3.7) \\ & \mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} \lambda_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{1t}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_{2t}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I}_{p+q} \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, n-1, \\ & \mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{1n}^{1/2} & \mathbf{B} \mathbf{V}_{2n}^{1/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V}_{2n}^{1/2} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

と書くことができる. 前節と同様に以下のようないくつかの特殊モデルを考慮する.

FASVt-q: 非対称性を考慮した多変量 t 分布を誤差項に持つ q 次元因子のモデル.

FASVn-q: FASVt-q モデルで誤差項が正規分布の ($\lambda_t \equiv 1, t = 1, \dots, n$ とした) モデル.

FSVt-q: FASVt-q モデルで非対称性を考えない ($\Sigma_{\varepsilon\eta} \equiv \mathbf{O}$ とした) モデル.

FSVn-q : FSVt-q モデルで誤差項が正規分布の ($\lambda_t \equiv 1, t = 1, \dots, n$ とした) モデル.

また以上のモデルを合わせて FSV モデルと総称する.

3.2 MCMC を用いたベイズ推定

事前分布には,

$$\begin{aligned} \beta_j &\sim \mathcal{N}_{r_j}(\beta_{0j}, \Gamma_{0j}), \quad \nu \sim \mathcal{G}(m_0^\nu, S_0^\nu) \\ \frac{\phi_j + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(a_j, b_j), \quad \Sigma_j \sim \mathcal{IW}(n_{0j}, \mathbf{R}_{0j}), \quad j = 1, \dots, p+q, \end{aligned}$$

を置き, 事前確率密度関数をそれぞれ $\pi(\beta)$, $\pi(\nu)$, $\pi(\phi_j)$, $\pi(\Sigma_j)$ とする. また FSVt-q, FSVn-q モデルにおいては Σ_j の事前分布を $j = 1, \dots, p+q$ について,

$$\begin{aligned} \sigma_{j\varepsilon}^2 &\sim \mathcal{IG}(n_{0j}^\varepsilon/2, \mathbf{R}_{0j}^\varepsilon/2), \\ \sigma_{j\eta}^2 &\sim \mathcal{IG}(n_{0j}^\eta/2, \mathbf{R}_{0j}^\eta/2), \end{aligned}$$

とおき, $\rho_j = 0$ とする. $\mathbf{f} = (\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n)'$, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}'_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}'_n)'$ とおき, $Y_n = \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^n$ とすると事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} \pi(\beta, \phi, \Sigma, \lambda, \nu, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha} | Y_n) &\propto \prod_{t=1}^{n-1} f(\mathbf{y}_t, \mathbf{f}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \beta, \phi, \Sigma, \boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t) \\ &\quad \times f(\mathbf{y}_n, \mathbf{f}_n | \beta, \phi, \Sigma, \boldsymbol{\alpha}_n, \lambda_n) f(\lambda | \nu) \\ &\quad \times f(\boldsymbol{\alpha}_1 | \phi, \Sigma) \pi(\beta) \prod_{j=1}^p \pi(\phi_j) \pi(\Sigma_j) \pi(\nu), \end{aligned} \quad (3.8)$$

であり, 事後分布からのサンプリングを以下のように考える.

[**アルゴリズム 1.**] 以下の条件付事後分布からサンプリングを繰り返し, 稼働検査期間 (burn-in period) 分を捨てた後保存する.

1. $\beta | \phi, \Sigma, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda, Y_n$ を生成する.
2. $\mathbf{f} | \beta, \phi, \Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \lambda, Y_n$ を生成する.
3. $\boldsymbol{\alpha} | \beta, \phi, \Sigma, \mathbf{f}, \lambda, Y_n$ を生成する.
4. $\Sigma | \beta, \phi, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda, Y_n$ を生成する.
5. $\phi | \beta, \Sigma, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda, Y_n$ を生成する.
6. $\lambda | \beta, \phi, \Sigma, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}, Y_n$ を生成する.

7. $\nu|\lambda$ を生成する.

ただし, 誤差項が正規分布である FASV_n, FSV_n モデルの場合にはステップ 6, 7 は省略する.

ステップ 1 では β をギブスサンプラーを用いてサンプリングを行う. $\beta_j, j = 1, \dots, p$ の条件付事後分布は正規分布となり,

$$\pi(\beta_j | \phi, \Sigma, \alpha, \mathbf{f}, Y_n) \propto \prod_{j=2}^p \exp\left(-\frac{1}{2}(\beta_j - \boldsymbol{\mu}_{\beta_j})' \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_j}^{-1}(\beta_j - \boldsymbol{\mu}_{\beta_j})\right),$$

と書くことができる. ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{\beta_j} &= \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_j} \left\{ \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{x}_{jt} \sigma_{jt}^{-1} (y_{jt} - \mu_{jt} - f_{jt} I(j \leq q)) \right) + \boldsymbol{\Gamma}_{j0}^{-1} b_{j0} \right\}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_j} &= \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{x}_{jt} \mathbf{x}_{jt}' + \boldsymbol{\Gamma}_{j0}^{-1} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

であり, ただし

$$\mathbf{x}_{jt} = (f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{\min(j-1, q), t})' \sigma_{jt}^{-1},$$

および

$$\begin{aligned} \mu_{jt} &= \lambda_t^{-1/2} \exp(\alpha_{jt}/2) \rho_j \sigma_{j\varepsilon} / \sigma_{j\eta} (\alpha_{j, t+1} - \phi_j \alpha_{jt}) I(t < n), \\ \sigma_{jt}^2 &= \lambda_t^{-1} \exp(\alpha_{jt}) \sigma_{j\varepsilon}^2 \{1 - \rho_j^2 I(t < n)\}, \end{aligned}$$

である. よって β_j は

$$\beta_j \sim \mathcal{N}_{\min(j-1, q)}(\boldsymbol{\mu}_{\beta_j}, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta_j}), \quad j = 1, \dots, p,$$

のようにサンプリングする. Chib *et al.* (2006), 大森 (2007) などでは \mathbf{f} を積分した周辺分布からのサンプリングを提案しているが, β の次元は通常大きいので, その条件付事後分布のモードの探索や平均, 分散共分散行列の計算量が大きくなることが多い. そこで Pitt and Shephard (1999) や So and Choi (2009) で用いられているギブスサンプラーを本稿では用いている.

ステップ 2 では \mathbf{f}_t の条件付事後分布は (3.6) から正規分布になるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t &\sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\Sigma}_f), \\ \boldsymbol{\mu}_f &= \mathbf{P}_{2t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{1t} (\mathbf{P}_{1t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{1t})^{-1} \mathbf{v}_{2t}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_f &= \mathbf{P}_{2t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{2t} - \mathbf{P}_{2t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{1t} (\mathbf{P}_{1t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{1t})^{-1} \mathbf{P}_{1t} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}'_{2t}, \end{aligned}$$

からサンプリングする。ここで

$$\mathbf{P}_{1t} = \begin{pmatrix} \lambda_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{1t}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I}_{p+q} \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, n-1,$$

$$\mathbf{P}_{2t} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}, \mathbf{V}_{2t}^{1/2}, \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2t} = (\mathbf{y}'_t, (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_t)')', \quad t = 1, \dots, n, \quad \mathbf{P}_{1n} = \begin{pmatrix} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}_{1n}^{1/2}, \\ \mathbf{B} \mathbf{V}_{2n}^{1/2}, \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{2n} = \mathbf{y}_n \text{ である.}$$

ステップ 3, 4, 5 では一変量モデルの手法を用いることができる。 a_{jt} を $\mathbf{B} \mathbf{f}_t$ の第 j 要素として y_{jt}^* を

$$y_{jt}^* = \begin{cases} \lambda_t^{1/2} (y_{jt} - a_{jt}) & j = 1, \dots, p \\ f_{jt} & j = p+1, \dots, p+q \end{cases}$$

とすると, $(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \lambda, \nu)$ を条件付けたとき, 一変量非対称確率的ボラティリティ変動モデル

$$\begin{aligned} y_{jt}^* &= \exp(\alpha_{jt}) \varepsilon_{jt}, \\ \alpha_{jt+1} &= \phi_j \alpha_{jt} + \eta_{jt}, \\ (\varepsilon_{jt}, \eta_{jt})' &\sim \mathcal{N}_2(0, \boldsymbol{\Sigma}_j), \end{aligned}$$

の形に変形することができるため, Omori and Watanabe (2008) で提案されたサンプリング手法を用いればよい (ここでは詳細は割愛する)。

ステップ 6-7 では, $\mathbf{y}_{1t}^{**} = \mathbf{y}_t - \mathbf{B} \mathbf{f}_t$, $\boldsymbol{\alpha}_{1t} = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{pt})'$, $\boldsymbol{\eta}_{1t} = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{pt})'$, $\boldsymbol{\Phi}_1 = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_p)$, とすると $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ を条件付けた下で

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{1t}^{**} &= \lambda_t^{-1/2} \mathbf{V}_{1t}^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \quad t = 1, \dots, n \\ \boldsymbol{\alpha}_{1,t+1} &= \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\alpha}_{1t} + \boldsymbol{\eta}_{1t}, \quad t = 1, \dots, n-1 \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\eta}_{1t} \end{pmatrix} &\sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}_{2p}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}^{**}), \quad \boldsymbol{\Sigma}^{**} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon} & \boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\eta} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{1,\eta\varepsilon} & \boldsymbol{\Sigma}_{1,\eta\eta} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\varepsilon} &= \text{diag}(\sigma_{1\varepsilon}^2, \dots, \sigma_{p\varepsilon}^2), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{1,\varepsilon\eta} = \text{diag}(\rho_{1\sigma_{1\varepsilon}\sigma_{1\eta}}, \dots, \rho_{p\sigma_{p\varepsilon}\sigma_{p\eta}}), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{1,\eta\eta} &= \text{diag}(\sigma_{1\eta}^2, \dots, \sigma_{p\eta}^2), \\ \lambda_t &\sim \text{i.i.d. } \mathcal{G}(\nu/2, \nu/2), \end{aligned}$$

のように MSV モデルの形で表現できる。したがって, アルゴリズム A.1 のステップ 4,5 と同様にサンプリングできる。

4. モデル比較基準

ベイズ統計分析において, モデル比較ではベイズ因数 (Bayes factor) や事後オッズ比が用いられることが多い。第 2,3 節で提案されたモデルはネストしていないため, それらを

求めるには別々に周辺尤度を計算することになる。確率的ボラティリティ変動モデルでは尤度計算のための粒子フィルタの計算回数が1回で済む Chib and Jeliazkov (2001) の方法が標準的な周辺尤度の計算の方法である。しかし、この方法を実行するにはパラメータの条件付き事後密度を評価する、密度の高い一点を選ぶ必要があり、パラメータ・潜在変数が高次元、かつデータ数も多い今回の分析においては、それが困難であった(同様の問題は Chib *et al.* (2006) でも報告されている)。また、Geweke (1999) が提案した簡便な重点密度 (importance density) を使い、そこからの標本各点で粒子フィルタを用いて尤度を評価した修正調和平均法・その重点密度を使ったブリッジサンプリング (Meng and Wong (1996), Frühwirth-Schnatter (2004)) なども考えられるが、今回は Σ の正定値性を考慮する必要があるので、Geweke (1999) の重点密度がそのままでは使うことができない。

そこで多変量確率的ボラティリティ変動モデルのモデル比較に関してはすでにより単純なモデルで Yu and Meyer (2006) らによって DIC を用いて比較が行われていることから、本稿においても DIC を用いたモデル比較を行った。DIC は

$$\text{DIC} = E_{\theta|Y_n}[D(\theta)] + p_D,$$

で定義される。ここで

$$p_D = E_{\theta|Y_n}[D(\theta)] - D(E_{\theta|Y_n}[\theta]), \quad D(\theta) = -2 \log f(Y_n|\theta) + C_{Y_n},$$

であり、 θ は潜在変数以外のパラメータ、 C_{Y_n} はモデルに依存しない定数である。モデル選択には影響を与えないので、便宜上 $C_{Y_n} = 0$ とおく。 $D(\theta)$ の計算には対数尤度の計算が必要になる。潜在変数に関して拡大した尤度関数を用いる方法もあるが、計算精度を考慮して、潜在変数 $\alpha, \mathbf{f}, \lambda$ を補助粒子フィルタ (auxiliary particle filter) を用いて積分する。補助粒子フィルタに関しては Pitt and Shephard (1999), Johansen and Doucet (2008) 等を参照されたい。

MSV モデルに関しては Ishihara and Omori (2011) で議論されているので、ここでは FSV モデルを中心に説明する。パラメータとデータ (Y_t, θ) を条件づけたときの潜在変数 $(\mathbf{f}_t, \alpha_t, \lambda_t)$ の条件付密度を $f(\mathbf{f}_t, \alpha_t, \lambda_t|Y_t, \theta)$ とすると

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{f}_{t+1}, \mathbf{f}_t, \alpha_{t+1}, \alpha_t, \lambda_{t+1}, \lambda_t|Y_{t+1}, \theta) \\ \propto & f(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{f}_{t+1}, \alpha_{t+1}, \lambda_{t+1}, \theta) f(\mathbf{f}_{t+1}|\alpha_{t+1}, \theta) f(\alpha_{t+1}|\mathbf{y}_t, \mathbf{f}_t, \alpha_t, \theta) \\ & \times f(\lambda_{t+1}|\theta), f(\mathbf{f}_t, \alpha_t, \lambda_t|Y_t, \theta), \end{aligned}$$

と書くことができる。この関係を用いて $f(\mathbf{f}_t, \alpha_t, \lambda_t|Y_t, \theta)$ を $f(\mathbf{f}_{t+1}, \alpha_{t+1}, \lambda_{t+1}|Y_{t+1}, \theta)$ に更新する補助粒子フィルタを行うことも可能である。しかし α_{t+1} に依存する \mathbf{f}_{t+1} に関し

て誤差が大きくなることがあるため、ここでは、尤度関数 (3.6) を解析的に積分した

$$\begin{aligned} & f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_{t+1}, \lambda_t | Y_{t+1}, \boldsymbol{\theta}) \\ \propto & f(\mathbf{y}_{t+1} | \boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \lambda_{t+1}, \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t, \boldsymbol{\theta}) f(\lambda_{t+1} | \boldsymbol{\theta}), f(\boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t | Y_t, \boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

を用いて $f(\boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t | Y_t, \boldsymbol{\theta})$ から $f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \lambda_{t+1} | Y_{t+1}, \boldsymbol{\theta})$ へ更新する補助粒子フィルタを考える。ここで

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t, \boldsymbol{\theta}) &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}^{-1} \mathbf{y}_t \right], \quad (4.1) \\ f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t, \boldsymbol{\theta}) &= (2\pi)^{-\frac{p+q}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{\alpha}_t}|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1})' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{\alpha}_t}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1}) \right], \quad (4.2) \\ \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1} &= \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\Sigma}_{\eta_t \mathbf{y}_t} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}^{-1} \mathbf{y}_t, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\alpha}_t \boldsymbol{\alpha}_t} = \boldsymbol{\Sigma}_{\eta \eta} - \boldsymbol{\Sigma}_{\eta_t \mathbf{y}_t} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \eta_t}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t} &= \lambda_t^{-1} \mathbf{V}_{1t}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{1, \varepsilon \varepsilon} \mathbf{V}_{1t}^{1/2} + \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \varepsilon} \mathbf{V}_{2t}^{1/2} \mathbf{B}', \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \eta_t} &= (\lambda_t^{-1/2} \mathbf{V}_{1t}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{1, \varepsilon \eta} \quad \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \eta}), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \varepsilon} &= \text{diag}(\sigma_{p+1, \varepsilon}^2, \dots, \sigma_{p+q, \varepsilon}^2), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \eta} &= \text{diag}(\rho_{p+1} \sigma_{p+1, \varepsilon} \sigma_{p+1, \eta}, \dots, \rho_{p+q} \sigma_{p+q, \varepsilon} \sigma_{p+q, \eta}), \quad (4.3) \end{aligned}$$

である。 $f(\boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t | Y_t, \boldsymbol{\theta})$ を離散的に近似した確率関数 $\hat{f}(\boldsymbol{\alpha}_t, \lambda_t | Y_t, \boldsymbol{\theta})$ を用いて重点関数を

$$\begin{aligned} & g(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \lambda_{t+1}, \boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_{t+1}, \boldsymbol{\theta}) \\ \propto & f(\mathbf{y}_{t+1} | \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i, \boldsymbol{\theta}) f(\lambda_{t+1}^i | \boldsymbol{\theta}) \hat{f}(\boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_t, \boldsymbol{\theta}) \\ \propto & f(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} | \mathbf{y}_t, \boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i, \boldsymbol{\theta}) f(\lambda_{t+1}^i | \boldsymbol{\theta}) g(\boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_{t+1}, \boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

とする。ただし、

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_{t+1}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{f(\mathbf{y}_{t+1} | \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \boldsymbol{\theta}) \hat{f}(\boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_t, \boldsymbol{\theta})}{\sum_{i=1}^I f(\mathbf{y}_{t+1} | \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \boldsymbol{\theta}) \hat{f}(\boldsymbol{\alpha}_t^i, \lambda_t^i | Y_t, \boldsymbol{\theta})}, \\ \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\alpha}, t+1}^i &= \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_t^i + \boldsymbol{\Sigma}_{\eta_t \mathbf{y}_t}^i \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}^{i-1} \mathbf{y}_t, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t}^i &= \lambda_t^{i-1} \mathbf{V}_{1t}^{i1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{1, \varepsilon \varepsilon} \mathbf{V}_{1t}^{i1/2} + \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{i1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \varepsilon} \mathbf{V}_{2t}^{i1/2} \mathbf{B}', \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}_t \eta_t}^i &= (\lambda_t^{i-1/2} \mathbf{V}_{1t}^{i1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{1, \varepsilon \eta} \quad \mathbf{B} \mathbf{V}_{2t}^{i1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{2, \varepsilon \eta}), \\ \mathbf{V}_{jt}^i &= \mathbf{V}_{jt} |_{\boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{\alpha}_t^i}, \quad j = 1, 2. \quad (4.4) \end{aligned}$$

である。これを用いて以下のように粒子フィルタを行う。

[アルゴリズム 2.]

ステップ 1.

- (a) $t = 1$ とし, $\alpha_1^i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_0)$, $\lambda_1^i \sim \mathcal{G}(\nu/2, \nu/2)$, ($i = 1, \dots, I$) を発生する.
- (b) $w_i = f(\mathbf{y}_1 | \alpha_1^i, \lambda_1^i, \theta)$ を計算し, $\bar{w}_1 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_i$ を保存する.
- (c) $\hat{f}(\alpha_1^i, \lambda_1^i | Y_1, \theta) = \pi_1^i = w_i / \sum_{j=1}^I w_j$ ($i = 1, \dots, I$) とする.

ステップ 2.

- (a) 各 i について $(\alpha_{t+1}^i, \alpha_t^i, \lambda_{t+1}^i, \lambda_t^i)$ を $g(\alpha_{t+1}^j, \alpha_t^j, \lambda_{t+1}^j, \lambda_t^j | Y_{t+1}, \theta)$, ($i, j = 1, \dots, I$) から以下のように発生する.

最初に $(\alpha_t^i, \lambda_t^i)$, $i = 1, \dots, I$ を確率 $g(\alpha_t^j, \lambda_t^j | Y_{t+1}, \theta)$, $j = 1, \dots, I$ でリサンプリングする. その後 $(\alpha_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i)$, $i = 1, \dots, I$ を密度関数 $f(\alpha_{t+1}^i | \mathbf{y}_t, \alpha_t^i, \theta) \cdot f(\lambda_{t+1}^i | \theta)$ に従う正規分布・ガンマ分布から発生させる.

- (b)

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{f(\mathbf{y}_{t+1} | \alpha_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \theta) f(\alpha_{t+1}^i | \mathbf{y}_t, \alpha_t^i, \lambda_t^i, \theta) f(\lambda_{t+1}^i | \theta) \hat{f}(\alpha_t^i, \lambda_t^i | Y_t, \theta)}{g(\alpha_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \alpha_t^i, \lambda_t^i | Y_{t+1}, \theta)} \\ &= \frac{f(\mathbf{y}_{t+1} | \alpha_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i, \theta) \hat{f}(\alpha_t^i, \lambda_t^i | Y_t, \theta)}{g(\alpha_t^i, \lambda_t^i | Y_{t+1}, \theta)}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, I$, を計算し, $\bar{w}_t = \sum_{i=1}^I w_i / I$ を保存する.

- (c) $\hat{f}(\alpha_{t+1}^i, \lambda_{t+1}^i | Y_{t+1}, \theta) = \pi_{t+1}^i = w_i / \sum_{j=1}^I w_j$ ($i = 1, \dots, I$) とする.

ステップ 3. $t \leftarrow t + 1$ としてステップ 2 へ戻る.

このとき

$$\sum_{t=1}^n \log \bar{w}_t \xrightarrow{P} \sum_{t=1}^n \log f(\mathbf{y}_t | Y_{t-1}, \theta), \quad \text{as } I \rightarrow \infty,$$

が成立し, 条件付対数尤度関数の一致推定量になっている. MASVt のときには

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_t | \alpha_t, \lambda_t) &= (2\pi)^{-p/2} |\lambda_t^{-1} \mathbf{V}_t^{1/2} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{V}_t^{1/2}|^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \lambda_t \mathbf{V}_t^{-1/2} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{V}_t^{-1/2} \mathbf{y}_t \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha_{t+1} | \mathbf{y}_t, \alpha_t, \lambda_t, \theta) &= (2\pi)^{-p/2} |\Sigma_\alpha|^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha_{t+1} - \mu_{\alpha,t+1})' \Sigma_\alpha^{-1} (\alpha_{t+1} - \mu_{\alpha,t+1}) \right\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\mu_{\alpha,t+1} = \Phi \alpha_t + \Sigma_{\eta\varepsilon} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{V}_t^{-1/2} \lambda_t^{1/2} \mathbf{y}_t,$$

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_{\eta\eta} - \Sigma_{\eta\varepsilon} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \Sigma_{\varepsilon\eta}, \tag{4.6}$$

$$\mu_{\alpha,t+1}^i = \Phi \alpha_t^i + \Sigma_{\eta\varepsilon} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{V}_t^i \lambda_t^i \mathbf{y}_t, \quad \mathbf{V}_t^i = \mathbf{V}_t |_{\alpha_t = \alpha_t^i},$$

としてアルゴリズム 3 を行えばよい.

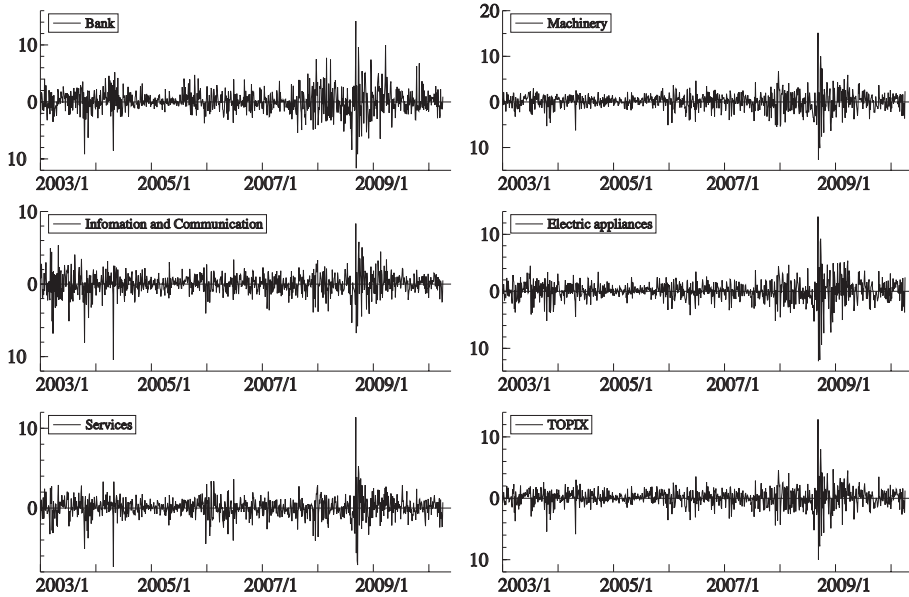


図1 東証業種別株価指数と TOPIX

5. 実証研究

本節では株価指数データを用いた実証分析を行う。最初にデータについて説明し、一変量モデルでの推定を行う。次に DIC を用いて多変量モデルの比較を行い、最後に MSV, FSV それぞれの中で最も良いモデルのパラメータ推定の結果を示す。本研究における計算は全て行列言語 Ox version 6.0 (Doornik (2006)) を用いた。

5.1 データと一変量モデルの推定結果

本稿では東証業種別株価指数 33 業種の中から銀行、機械、情報通信、電気機器、サービスの 5 業種の日次系列を用いた。2003 年 1 月 6 日から 2010 年 5 月 28 日までの終値から対数階差の 100 倍でパーセント表示の収益率を定義した。収益率のプロットを図 1 に示す。

また、表 1 に一変量モデル (MASV_t モデルで $p = 1$ としたもの) での推定結果を示す。事前分布は

$$\frac{\phi + 1}{2} \sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad \nu \sim \mathcal{G}(0.01, 0.01),$$

$$\Sigma \sim \mathcal{IW}(5, (5\Sigma_i^*)^{-1}), \quad \Sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.04 \end{pmatrix},$$

を用いた。事前分布では ϕ については平均 0.86、標準偏差 0.11 であり、 ν については平均 1、標準偏差 10、 Σ についてはその逆行列の期待値が Σ^* の逆行列に等しくなっている。

それぞれの推定値については、ボラティリティの持続性を表す ϕ の値が高く、非対称性を示す ρ は負で、ある日の収益率が負の時に次の日のボラティリティが大きくなるという

表1 t 分布を誤差に持つ一変量非対称確率的ボラティリティ変動モデルの推定結果, 事後平均 (Mean), 事後標準偏差 (Stdev) および 95% 信用区間 (95% interval).

	Series	Mean	Stdev	95% interval		Series	Mean	Stdev	95% interval
ϕ	1	0.984	0.005	[0.973, 0.993]	σ_ε	1	1.697	0.184	[1.371, 2.096]
	2	0.972	0.006	[0.959, 0.983]		2	1.612	0.104	[1.426, 1.833]
	3	0.979	0.007	[0.964, 0.991]		3	1.299	0.123	[1.100, 1.600]
	4	0.985	0.004	[0.976, 0.993]		4	1.504	0.157	[1.240, 1.865]
	5	0.960	0.011	[0.936, 0.979]		5	1.088	0.065	[0.976, 1.236]
σ_η	1	0.177	0.020	[0.140, 0.219]	ρ	1	-0.394	0.075	[-0.533, -0.235]
	2	0.188	0.020	[0.151, 0.230]		2	-0.611	0.058	[-0.715, -0.489]
	3	0.156	0.020	[0.119, 0.200]		3	-0.316	0.095	[-0.493, -0.120]
	4	0.157	0.017	[0.127, 0.193]		4	-0.497	0.075	[-0.632, -0.339]
	5	0.199	0.026	[0.153, 0.255]		5	-0.454	0.072	[-0.587, -0.301]
ν	1	57.8	54.8	[16.0, 219.1]					
	2	117.6	97.1	[24.4, 395.0]					
	3	50.7	42.6	[14.7, 169.8]					
	4	82.9	57.9	[19.8, 240.1]					
	5	85.4	86.0	[18.2, 354.3]					

結果になった。これらは多くの先行研究と同様である。また、 t 分布の自由度は非常に大きく、確率的ボラティリティを考慮したもとは、それほど裾は厚い分布ではないことが分かる。

次に多変量モデルに関する分析を行う。MSV モデルでは、系列の順番は推測に影響しないが、FSV モデルでは系列の順番が推定の結果やその解釈に影響を及ぼす。このため理想的には、すべての順番・因子数に関して周辺尤度や DIC を計算し、最良の順番・因子数を選択する方法や、リバーシブルジャンプ MCMC 法などを用いてモデル自体も MCMC を用いて推定してしまう方法などが考えられる (リバーシブルジャンプ MCMC については Green (1995), ファイナンスモデルへの応用は Vrontos *et al.* (2000), 粕谷・高川 (2005), 多変量時系列の順序に関する効率的なアルゴリズムに関しては Nakajima and Watanabe (2011) 等を参照されたい。)。しかしながら、候補となるモデルも発生させるパラメータ・潜在変数の数も非常に多いため、どちらの方法も実行が困難である。そこで今回は以下のようにして因子数と系列の順番を決定した。まず、5 系列に対して通常の因子分析を行い、スクリープロットや AIC, BIC を用いて因子数を選んだ。今回のデータではどの基準を用いても因子数は 2 で十分であった。さらに通常の因子分析の因子負荷行列を参考に第 2 因子からの影響が小さい系列を第 1 系列、それ以外で第 2 因子からの影響がある程度大きい系列を第 2 系列として 1 銀行, 2 機械, 3 情報通信, 4 電気機器, 5 サービスの順とした。

表 2 DIC の平均, 標準誤差, 最大値・最小値, 順位.

Model	DIC	(s.e.)	DIC _{max}	DIC _{min}	rank
MASVt	24997.4	(1.8)	25009.1	24986.5	1
MASVn	25006.0	(0.9)	25011.5	25001.2	3
MSVt	25000.1	(1.5)	25008.5	24992.2	2
MSVn	25011.8	(1.0)	25021.9	25004.0	4
FASVt-1	25512.0	(2.4)	25522.0	25501.0	9
FASVn-1	25569.7	(1.6)	25574.8	25558.5	10
FASVt-2	25142.2	(1.7)	25153.4	25135.9	5
FASVn-2	25158.5	(1.6)	25167.3	25150.0	6
FSVt-1	25667.4	(3.2)	25687.6	25649.7	11
FSVn-1	25708.2	(1.6)	25720.4	25697.6	12
FSVt-2	25196.3	(2.7)	25208.9	25184.6	7
FSVn-2	25209.4	(2.3)	25219.1	25201.0	8

5.2 モデル比較

まずモデル比較の結果を示す. DIC の計算には, 対数尤度関数の事後期待値とパラメータの事後平均で評価した対数尤度関数の値が必要になる. MCMC を用いた推定に関しての設定は, それぞれのモデルに関して次節以降に示す. 尤度関数の事後期待値 $E_{\theta|Y_n}[D(\theta)]$ は, MCMC を用いて得られた標本を $M = 100$ 個りサンプリングした値 $\theta^{(m)}$ を用いて $\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M D(\theta^{(m)})$ により計算する. また数値的に推定値の誤差を求めるために, これを 10 回繰り返す. 同様にパラメータの事後平均で評価した尤度関数の値 $D(E_{\theta|Y_n}[\theta])$ についても 10 回計算する. 対数尤度 $\log f(Y_n|\theta)$ の計算には第 4 節で議論した補助粒子フィルタを用い, 粒子数は $I = 10,000$ とした.

表 2 はそれぞれのモデルに対して 10 回繰り返し計算した DIC の平均値, 数値的な標準誤差, DIC の推定値の最大値と最小値, DIC の平均値の昇順での順位を示している. 一般に FSV モデルよりも MSV モデルのほうがよいことがわかる. MSV モデルの中では, MASVt モデルが最もよく, 誤差項の分布に関する仮定が同じならば非対称性を考慮したほうが, 非対称性に関する仮定が同じならば t 分布のほうがよいことがわかる. 一方で FSV モデルでは, FASVt-2 モデルが最もよく DIC の改善の幅が比較的大きい. また因子数は 1 よりも 2 のほうがよく, 誤差項の分布と非対称性の仮定に関しては MSV モデルと同様の関係があった.

また, 順番を入れ替えた場合の影響をみるために, 並べ替えた例をあげる. 表 3 では FASVt-2 モデルで最初の二つを入れ替えたケース (2,1,3,4,5 の順の並べ替え) と二つのファクターから影響を強く受けているものを最初にした場合 (4,1,2,3,5 の順の並べ替え) で推定した DIC を示した. 因子を二つ以上仮定する場合は, 因子の数ほどではないが順序も DIC

表3 FASVt-2 モデル, データの順番を入れ替えた場合の DIC の平均, 標準誤差, 最大値・最小値.

順番	DIC	(s.e.)	DIC _{max}	DIC _{min}
12345	25142.2	(1.7)	25153.4	25135.9
21345	25184.1	(2.9)	25193.3	25162.8
41235	25199.2	(2.5)	25210.6	25185.5

に影響することが分かる. 特に表3に示した二つのケースの場合, 第1, 第2因子に両方に強く影響されている業種が第1系列となるため, 2つ目の因子の変動が小さくなりデータの変動を十分に説明できなくなることによると解釈できる.

以下では, それぞれのモデルの中で最も当てはまりの良かった MASVt モデルと FASVt-2 モデルに関しての推定結果を示す.

5.3 MASVt モデルの推定結果

この項では MASVt モデルの推定に関する設定と結果を示す. MSV モデルに関して, 事前分布には

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad i = 1, \dots, 5, \\ \Sigma &\sim \mathcal{IW}(10, (10\Sigma^*)^{-1}), \quad \nu \sim \mathcal{G}(0.01, 0.01), \end{aligned}$$

を仮定した. ここで

$$\begin{aligned} \Sigma^* &= \begin{pmatrix} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^* & \Sigma_{\varepsilon\eta}^* \\ \Sigma_{\varepsilon\eta}^{*\prime} & \Sigma_{\eta\eta}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.2^2(0.3\mathbf{I}_5 + 0.7\mathbf{1}_5\mathbf{1}'_5) & 1.2 \times 0.2 \times (-0.1\mathbf{I}_5 - 0.11\mathbf{1}_5\mathbf{1}'_5) \\ & 0.2^2(0.2\mathbf{I}_5 + 0.8\mathbf{1}_5\mathbf{1}'_5) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

であり $E(\Sigma^{-1}) = \Sigma^{*-1}$ である. また, MSVt, MSVn に対しては

$$\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} \sim \mathcal{IW}(5, (5\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^*)^{-1}), \quad \Sigma_{\eta\eta} \sim \mathcal{IW}(5, (5\Sigma_{\eta\eta}^*)^{-1}),$$

を仮定した. 推定には, アルゴリズム A.1 を用いて 12 万個サンプリングして最初の 2 万個を稼働検査期間として捨てた. ブロックサンプラーについてはいくつかの K を試し, MCMC の非効率性の基準の一つである非効率性因子 (Inefficiency factor) がその中で最も小さくなったブロック数 $K = 90$ とした. 非効率性因子は MCMC 標本の自己相関を考慮した分散と, 仮想的に独立と仮定した場合の分散との比であり, 独立標本を用いたのと同じ精度の推定量を計算するのに何倍の MCMC 標本数が必要かを示している. 詳しくは Chib (2001), 小西他 (2008), 古澄 (2009) 等を参照されたい.

表4 MASVt モデル. $\phi_i, \sigma_{i,\varepsilon\varepsilon}, \sigma_{i,\eta\eta}, \rho_{i,\varepsilon\eta}, \nu$ の事後平均 (Mean), 事後標準偏差 (Stdev), 95% 信用区間 (95% interval), 非効率性因子 (Inefficiency).

	i	Mean	Stdev	95% interval	Inefficiency
ϕ_i	1	0.976	0.005	[0.965, 0.985]	96
	2	0.971	0.005	[0.960, 0.980]	106
	3	0.977	0.005	[0.967, 0.986]	89
	4	0.980	0.004	[0.971, 0.987]	101
	5	0.967	0.006	[0.954, 0.979]	101
$\sigma_{i,\varepsilon\varepsilon}$	1	1.630	0.140	[1.356, 1.909]	280
	2	1.501	0.085	[1.345, 1.680]	190
	3	1.247	0.091	[1.077, 1.440]	254
	4	1.435	0.104	[1.246, 1.657]	292
	5	1.075	0.055	[0.973, 1.193]	199
$\sigma_{i,\eta\eta}$	1	0.184	0.018	[0.151, 0.221]	154
	2	0.167	0.016	[0.138, 0.199]	151
	3	0.153	0.015	[0.126, 0.183]	137
	4	0.150	0.014	[0.125, 0.179]	134
	5	0.160	0.015	[0.133, 0.191]	166
$\rho_{i,\varepsilon\eta}$	1	-0.233	0.073	[-0.373, -0.086]	26
	2	-0.392	0.065	[-0.515, -0.260]	45
	3	-0.191	0.088	[-0.354, -0.011]	55
	4	-0.297	0.075	[-0.440, -0.146]	51
	5	-0.330	0.072	[-0.465, -0.182]	57
ν		34.3	10.9	[20.8, 60.6]	167

推定結果は表 4, 5 にまとめているが, 特に分散共分散行列 Σ についてはその要素について,

$$\begin{aligned} \sigma_{i,\varepsilon\varepsilon} &\equiv \sqrt{Var(\varepsilon_{it})}, & \sigma_{i,\eta\eta} &\equiv \sqrt{Var(\eta_{it})}, & \rho_{i,\varepsilon\eta} &\equiv Corr(\varepsilon_{it}, \eta_{it}), \\ \rho_{ij,\varepsilon\varepsilon} &\equiv Corr(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}), & \rho_{ij,\eta\eta} &\equiv Corr(\eta_{it}, \eta_{jt}), & \rho_{ij,\varepsilon\eta} &\equiv Corr(\varepsilon_{it}, \eta_{jt}), \end{aligned}$$

($i, j = 1, 2, \dots, 5, i \neq j$) を示している. まず表 4 は一変量モデルに対応するパラメータの推定結果である. 各系列に関して収益率から, その系列のボラティリティへの非対称性を表すパラメータ $\rho_{i,\varepsilon\eta}$ はすべて 95% 信用区間に 0 を含まないが, 事後平均は個別系列のみを考えている場合よりも絶対値の意味で小さくなっている. 例えば, 系列 2 の機械産業に関しては一変量モデルでは ρ の事後平均が -0.611 であったが多変量モデルでは $\rho_{i,\varepsilon\eta}$ の事後平均は -0.392 となっている. これは, 交差非対称性と収益率・ボラティリティの相関によって変動が説明されていることによると考えられる. また, 多変量 t 分布の自由度は一変量モデル ($50.7 \sim 117.6$) と比較すると小さいが, 34.3 とやや大きな値となっている.

表5 MASvt モデル $\rho_{ij,\varepsilon\varepsilon}, \rho_{ij,\eta\eta}, \rho_{ij,\varepsilon\eta}$ の事後平均 (Mean), 事後標準偏差 (Stdev), 95% 信用区間 (95% interval), 非効率性因子 (Inefficiency).

	ij	Mean	Stdev	95% interval	Inefficiency
$\rho_{ij,\varepsilon\varepsilon}$	12	0.726	0.012	[0.702, 0.749]	2
	13	0.634	0.015	[0.604, 0.663]	3
	14	0.709	0.013	[0.683, 0.733]	3
	15	0.699	0.013	[0.673, 0.723]	4
	23	0.648	0.014	[0.620, 0.676]	2
	24	0.858	0.007	[0.845, 0.871]	2
	25	0.753	0.011	[0.731, 0.774]	3
	34	0.703	0.013	[0.677, 0.727]	2
	35	0.732	0.012	[0.709, 0.754]	3
	45	0.742	0.011	[0.719, 0.764]	3
$\rho_{ij,\eta\eta}$	12	0.763	0.055	[0.641, 0.853]	120
	13	0.639	0.079	[0.470, 0.778]	108
	14	0.727	0.063	[0.589, 0.837]	132
	15	0.674	0.074	[0.512, 0.798]	145
	23	0.673	0.068	[0.523, 0.788]	83
	24	0.831	0.037	[0.748, 0.892]	89
	25	0.778	0.050	[0.670, 0.862]	79
	34	0.792	0.048	[0.687, 0.872]	83
	35	0.814	0.044	[0.715, 0.886]	115
	45	0.807	0.045	[0.706, 0.883]	134
$\rho_{ij,\varepsilon\eta}$	12	-0.356	0.068	[-0.483, -0.215]	32
	13	-0.152	0.083	[-0.312, 0.013]	64
	14	-0.219	0.077	[-0.364, -0.062]	45
	15	-0.211	0.079	[-0.359, -0.053]	82
	21	-0.183	0.077	[-0.330, -0.031]	53
	23	-0.143	0.082	[-0.302, 0.019]	56
	24	-0.251	0.073	[-0.391, -0.105]	40
	25	-0.276	0.075	[-0.419, -0.125]	64
	31	-0.161	0.085	[-0.324, 0.010]	37
	32	-0.309	0.080	[-0.461, -0.146]	49
	34	-0.228	0.083	[-0.387, -0.062]	57
	35	-0.292	0.082	[-0.445, -0.124]	56
	41	-0.203	0.079	[-0.355, -0.044]	36
	42	-0.369	0.070	[-0.498, -0.226]	46
	43	-0.199	0.085	[-0.360, -0.027]	73
	45	-0.315	0.078	[-0.461, -0.155]	66
51	-0.196	0.076	[-0.343, -0.042]	34	
52	-0.367	0.070	[-0.498, -0.225]	44	
53	-0.197	0.081	[-0.349, -0.033]	44	
54	-0.224	0.076	[-0.368, -0.072]	40	

表5では、収益率の相関 $\rho_{i,j,\varepsilon\varepsilon}$ の事後平均は高い値 (0.648 ~ 0.858) で推定されている。これは、分析に用いた系列が全て同一市場内にあるためであると考えられる。また多くの $\rho_{i,j,\varepsilon\eta}$ の 95% 信用区間はゼロを含まず負に値をとっており、したがって業種別株価指数に負の交差非対称性があることが示されている。特に事後平均では $\rho_{j2,\varepsilon\eta} < \rho_{2j,\varepsilon\eta}$ が $j \neq 2$ に対して成立しており、価格変化のほかの産業への効果が非対称となっている。このことから、標本期間において機械産業の収益率系列は他の産業の指数の下落に影響を受けやすいが、その逆に他の産業の指数は機械産業の収益率系列の下落にはそれほど影響を受けないと解釈することができる。

5.4 FASVt-2 モデルの推定結果

次に FASVt-2 モデルの推定結果を示す。事前分布は

$$\begin{aligned} \beta_j &\sim \mathcal{N}_{r_j}(\mathbf{0}, 10\mathbf{I}_{r_j}), \quad \nu \sim \mathcal{G}(0.01, 0.01), \\ \frac{\phi_j + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(20, 1.5), \quad \Sigma_j \sim \mathcal{IW}(5, (5\Sigma_j^*)^{-1}), \quad j = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

とした。ここで

$$\Sigma_j^* = \begin{pmatrix} \sigma_{j\varepsilon}^{*2} & \rho_j \sigma_{j\varepsilon}^* \sigma_{j\eta}^* \\ \rho_j \sigma_{j\varepsilon}^* \sigma_{j\eta}^* & \sigma_{j\eta}^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.02 \\ & 0.04 \end{pmatrix},$$

$E(\Sigma_j^{-1}) = \Sigma_j^{*-1}$ とした。

表6は因子負荷行列の要素の推定結果であり、図2は推定された因子系列の事後平均と TOPIX 全体の変動のプロットである。第1因子に関するすべての系列への因子負荷は正の値 (0.726 ~ 0.963) をとって全体に影響を与えており、また図2より第1因子が同時期の TOPIX と近い変動をしていることから、第1因子はマーケットファクターと解釈することができる。

一方で、第2因子に関する因子負荷は機械についての1に対して電気機器については正 (0.923)、情報通信業、サービス業に対しては負 (-0.495, -0.276) になっている。そのため第2因子は第2次産業のファクターだと解釈できる。第2因子のボラティリティは、アメリカでサブプライム住宅ローン問題が顕在化し始めた2007年以降大きく始め、2008年9月15日にリーマンブラザーズに連邦破産法第11章が適用された以降、非常に大きくなっている。このことから、いわゆるリーマンショックの時期において、第2次産業の変動と他の産業の変動との乖離が大きくなっていることがわかる。また、第2因子は、MSVモデルにおいて収益率の相関係数 $\rho_{24,\varepsilon\varepsilon}$ が $\rho_{23,\varepsilon\varepsilon}$, $\rho_{25,\varepsilon\varepsilon}$ と比べて高いことと対応している。

表7はそれぞれの系列のパラメータの推定結果を示している。ボラティリティの持続性を表すパラメータ ϕ_i は、因子・誤差項どちらについても高い値 (0.964 ~ 0.997) が推定されている。これは、ボラティリティの変動は共通因子だけではなく、系列固有のボラティリ

表6 FASVt-2 モデル. $\beta_{ij}, i = 2, \dots, 5, j = 1, 2$. の事後平均 (Mean), 事後標準偏差 (Stdev), 95% 信用区間 (95% interval), 非効率性因子 (Inefficiency).

	ij	Mean	Stdev	95% interval	Inefficiency
β_{ij}	21	0.963	0.025	[0.914, 1.013]	73
	31	0.771	0.022	[0.728, 0.815]	58
	41	0.960	0.024	[0.913, 1.007]	69
	51	0.726	0.020	[0.688, 0.766]	61
	32	-0.495	0.106	[-0.721, -0.304]	107
	42	0.923	0.106	[0.728, 1.148]	446
	52	-0.276	0.085	[-0.462, -0.125]	173

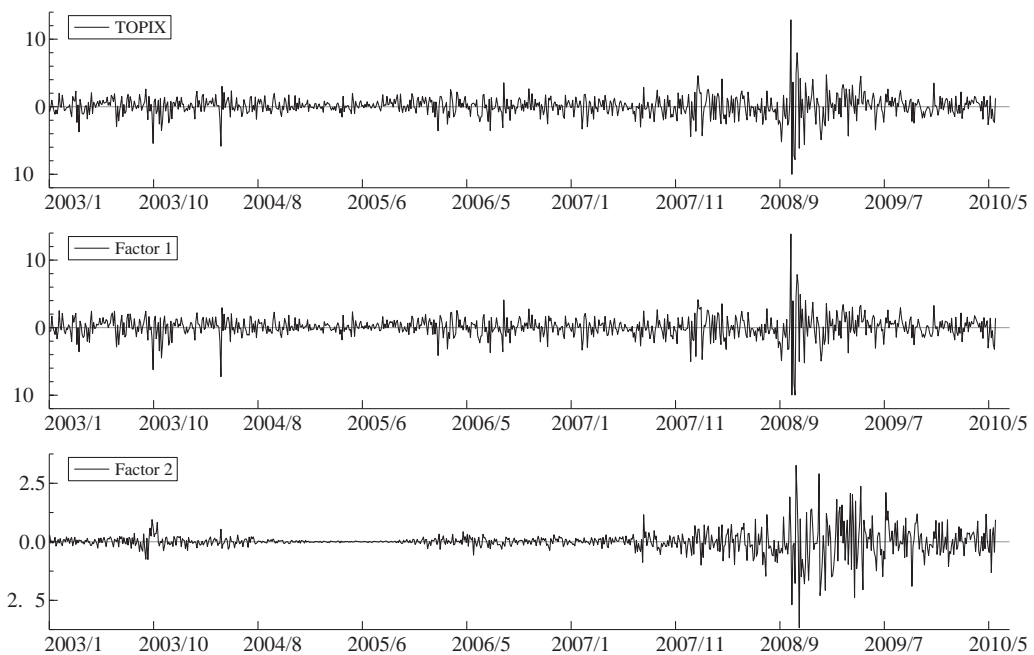


図2 FMSVt-2 モデル. 二つのファクターの系列の事後平均推定値と TOPIX の時系列, $f_{jt} (j = 1, 2)$.

ティに関しても高い持続性があるということを示している. 第2因子や系列2の自己相関の高さは, 図2の第2因子のように時期によって大きく異なる変動を反映していると考えられる. 非対称性の効果を表す ρ_i は第1因子にのみ強く現れ (ρ_6 の事後平均が -0.594), 他の ρ_i については (事後分布の95%信用区間が0を含んでいるという意味で) あまり強くはない. これは, 非対称性の効果がマーケットファクターにのみ現れ, 系列固有のボラティリティには観測されないことを示している. これは個別株に EGARCH 誤差を持つマーケットモデルを当てはめることで非対称性が観測されなくなる竹内(野木森)(2009)の結果と同様である. また因子の項に非対称性があるということは因子負荷 β を介して交差非対称性が存在するという意味も示している. 誤差項の多変量 t 分布の自由度は, MASVt モデ

表7 FMSVt-2モデル. $\phi_i, \sigma_{i\varepsilon}, \sigma_{i\eta}, \rho_i$ の事後平均 (Mean), 事後標準偏差 (Stdev), 95% 信用区間 (95% interval), 非効率性因子 (Inefficiency) $i = 6, 7$ は 2 つの因子に対応する.

	i	Mean	Stdev	95% interval	Inefficiency
ϕ_i	1	0.980	0.007	[0.965, 0.992]	93
	2	0.990	0.006	[0.976, 0.998]	424
	3	0.988	0.005	[0.976, 0.997]	146
	4	0.987	0.007	[0.971, 0.998]	367
	5	0.964	0.015	[0.928, 0.987]	218
	6	0.964	0.008	[0.947, 0.979]	89
	7	0.997	0.002	[0.992, 0.999]	480
$\sigma_{i\varepsilon}$	1	1.004	0.113	[0.806, 1.249]	239
	2	0.714	0.149	[0.511, 1.097]	714
	3	0.770	0.111	[0.599, 1.044]	366
	4	0.619	0.134	[0.468, 1.001]	1032
	5	0.520	0.046	[0.450, 0.625]	273
	6	1.255	0.082	[1.103, 1.427]	94
	7	0.923	0.299	[0.538, 1.688]	1419
$\sigma_{i\eta}$	1	0.186	0.025	[0.141, 0.240]	173
	2	0.168	0.028	[0.120, 0.230]	328
	3	0.147	0.023	[0.107, 0.195]	202
	4	0.144	0.025	[0.104, 0.201]	254
	5	0.167	0.031	[0.115, 0.237]	261
	6	0.219	0.025	[0.175, 0.271]	141
	7	0.177	0.032	[0.124, 0.250]	397
ρ_i	1	-0.106	0.103	[-0.303, 0.099]	57
	2	-0.244	0.133	[-0.494, 0.027]	121
	3	0.114	0.141	[-0.168, 0.380]	80
	4	-0.126	0.141	[-0.395, 0.153]	92
	5	-0.138	0.123	[-0.376, 0.107]	79
	6	-0.594	0.066	[-0.710, -0.453]	76
	7	-0.154	0.176	[-0.487, 0.196]	181
ν		21.3	5.3	[14.0, 34.2]	162

ルのものより小さいが、これは系列固有のボラティリティの変動の裾が重いことを示唆している。

6. おわりに

本稿では、交差非対称性のある多変量確率的ボラティリティ変動モデルと交差非対称性のある多変量因子確率的ボラティリティ変動モデルを東京証券取引所の業種別株価指数収益率に応用し、DIC を用いた比較を行った。その結果、交差非対称性のある多変量確率的

ボラティリティ変動モデルの方が DIC の意味でデータへの当てはまりよい結果になった。しかしながら、計算の都合上高次元でのモデルの適用は因子を用いたほうがパラメータ数を節約でき有利である場合も考えられる。今後は、因子のあるモデルをより現実のデータに適合するように改良する研究とともに、因子を用いない多変量確率的ボラティリティ変動モデルについてはより高次元なデータに対しても適用できるような計算法の開発が必要であろう。また収益率の相関構造の時間を通じた変動を交差非対称性のある多変量確率的ボラティリティ変動モデルに導入することも重要であると考えられる。さらに、今回の研究では収益率系列への分析を行ったが、個別株価や為替などボラティリティ変動のある様々な金融資産を同時に多変量モデリングすることも応用上必要であろう。その場合は非対称性のない系列や系列特有の変動もあるため、より扱いやすいモデルを作ることも重要であると考えられる。

また、近年では高頻度取引データを用いたボラティリティの推定量である実現ボラティリティ (Realized volatility, Andersen *et al.* (2001), Barndorff-Nielsen and Shephard (2002)) の研究も盛んに行われており、実現カーネル (realized kernel) 推定量 (Barndorff-Nielsen *et al.* (2008)) などの様々な推定量が提案され、一般に実現測度 (realized measure) と総称され、その予測モデルも提案されている。さらに GARCH モデル、確率的ボラティリティ変動モデルに実現測度を組み込むことによって予測精度やデータへの当てはまりのパフォーマンスがよくなることがわかってきており (Engle and Gallo (2006), Takahashi *et al.* (2009), Shephard and Sheppard (2010), Hansen *et al.* (2010) などを参照されたい)、本稿で推定したモデルについて実現測度をとり入れた拡張を行うことも重要であり、今後の課題としたい。

謝辞

匿名査読者の有益なコメントに感謝の意を表す。本研究は独立行政法人学術振興会の科学研究費補助金 (基盤研究 (A), 「金融リスクと経済行動のベイズ計量経済分析」, 課題番号 21243018) の助成を受けている。

A. 補遺

A.1 MSV モデルの MCMC アルゴリズム

本節では、MSV モデルの事後密度 (2.15) をもつ事後分布からの MCMC 法を用いたサンプリングを考える。

[**アルゴリズム A.1**] 以下の条件付事後分布からサンプリングを繰り返し、稼働検査期間 (burn-in period) 分捨てた後保存する。

1. $\alpha|\phi, \Sigma, \lambda, Y_n$ を生成する。

2. $\Sigma|\phi, \alpha, \lambda, Y_n$ を生成する.
3. $\phi|\Sigma, \alpha, \lambda, Y_n$ を生成する.
4. $\lambda|\phi, \Sigma, \alpha, \lambda, Y_n$ を生成する.
5. $\nu|\lambda$ を生成する.

ただし、誤差項が正規分布である MASV_n, MSV_n モデルの場合にはステップ 4, 5 は省略する.

ステップ 1 はブロックサンプラーを用いて生成する. 最初に $\alpha = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)'$ を $K+1$ 個のブロック $(\alpha'_{k_{i-1}+1}, \dots, \alpha'_{k_i})'$, $i = 1, \dots, K+1$ に分ける, ただし $k_0 = 0, k_{K+1} = n, k_i - k_{i-1} \geq 2$ である. ここでは Shephard and Pitt (1997) にしたがって K 個の点 (k_1, \dots, k_K) は $(0, 1)$ 上の独立な一様分布に従う $U_i, i = 1, \dots, K$ を発生させ

$$k_i = \text{int}[n \times (i + U_i)/(K + 2)], \quad i = 1, \dots, K,$$

とする. K はブロックの数を調整するパラメータであり, 標本の自己相関が小さくなるように選べばよい.

i 番目のブロックが $k_{i-1} = s, k_i = s + m$ であるとする. ここで, α_t を直接サンプリングすると自己相関が高くなることが知られているので, $\mathbf{x}_t = \mathbf{R}_t^{-1}\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{R}_t^{-1}(\alpha_{t+1} - \Phi\alpha_t)$ のサンプリングを考える. ここで行列 \mathbf{R}_t は状態方程式の分散共分散行列のコレスキー分解であり, $t > 0$ に関しては $\Sigma_{\eta\eta} = \mathbf{R}_t\mathbf{R}'_t$, $t = 0$ に関しては $\Sigma_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{R}'_0$ とする.

このとき \mathbf{x} の対数条件付事後密度関数は定数部分を除いて

$$\log f(\mathbf{x}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=s}^{s+m-1} \mathbf{x}'_t \mathbf{x}_t + L, \quad (\text{A.1})$$

ここで

$$L = \sum_{t=s}^{s+m} l_s - \frac{1}{2}(\alpha_{s+m+1} - \Phi\alpha_{s+m})'\Sigma_{\eta\eta}^{-1}(\alpha_{s+m+1} - \Phi\alpha_{s+m})I(s+m < n),$$

である. 提案密度として, L の部分を \mathbf{x} のモード $\hat{\mathbf{x}}$ の周りでテーラー展開を行い, さらにヘッセ行列に関しては, 情報行列で置き換えることで

$$\begin{aligned} & \log f(\mathbf{x}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}) \\ \approx & \text{const.} - \frac{1}{2} \sum_{t=s}^{s+m-1} \mathbf{x}'_t \mathbf{x}_t + \hat{L} \\ & + \sum_{t=s+1}^{s+m} \left[\hat{\mathbf{d}}'_t - \frac{1}{2}(\mathbf{a}_t - \hat{\mathbf{a}}_t)'\hat{\mathbf{A}}_t + (\mathbf{a}_{t-1} - \hat{\mathbf{a}}_{t-1})'\hat{\mathbf{B}}_t \right] (\mathbf{a}_t - \hat{\mathbf{a}}_t) \\ = & \text{const.} + \log f^*(\mathbf{x}|\alpha_s, \alpha_{s+m+1}, \mathbf{y}_s, \dots, \mathbf{y}_{s+m}), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と近似して得られる正規密度を用いる。MASVt モデルでは、

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_t &= \partial L / \partial \boldsymbol{\alpha}_t \quad t = s+1, \dots, s+m, \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{1}_p + \frac{1}{2} \left\{ \text{diag}(\mathbf{z}_t) - 2\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} I(t < n) \right\} \mathbf{S}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{m}_t) \\ &\quad + \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \mathbf{S}_{t-1}^{-1} (\mathbf{z}_{t-1} - \mathbf{m}_{t-1}) I(t > 1) \\ &\quad + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_t) I(t = s+m < n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= -E \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\alpha}_t \partial \boldsymbol{\alpha}_t'} \right] \quad t = s+1, \dots, s+m, \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{I}_p + \mathbf{S}_t^{-1} \odot (\mathbf{S}_t + \mathbf{m}_t \mathbf{m}_t') \right\} + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \mathbf{S}_t^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi} I(t < n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \mathbf{S}_t^{-1} \text{diag}(\mathbf{m}_t) + \text{diag}(\mathbf{m}_t) \mathbf{S}_t^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \right) I(t < n) \\ &\quad + \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \mathbf{S}_{t-1}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} I(t > 1) + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi} I(t = s+m < n), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= -E \left[\frac{\partial^2 l_{t-1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_t \partial \boldsymbol{\alpha}_t'} \right] \quad t = s+2, \dots, s+m \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\varepsilon} \mathbf{S}_{t-1}^{-1} \left\{ \text{diag}(\mathbf{m}_{t-1}) - 2\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon\eta} \boldsymbol{\Sigma}_{\eta\eta}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$\mathbf{B}_{s+1} = \mathbf{O}$ とする。 $\hat{\mathbf{d}}_t$, $\hat{\mathbf{A}}_t$, $\hat{\mathbf{B}}_t$ はそれぞれ、 $\hat{\mathbf{x}}$ から (3.9) を用いて計算された $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ の下で \mathbf{d}_t , \mathbf{A}_t , \mathbf{B}_t を評価した値である。

Omori and Watanabe (2008) は、(A.2) の近似で得られる正規分布が、

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{u}_t, \quad t = s+1, \dots, s+m, \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{H}_t \mathbf{u}_t, \quad t = s+1, \dots, s+m-1, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{u}_t = (\boldsymbol{\xi}_t', \boldsymbol{\eta}_t')' \sim \mathcal{N}_{2p}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2p})$$

の線型ガウス状態空間表現で得られることを示した。ただし $\hat{\mathbf{y}}_t$, \mathbf{Z}_t , \mathbf{G}_t は以下の漸化式

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t &= \hat{\mathbf{A}}_t - \hat{\mathbf{B}}_t \mathbf{D}_{t-1}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_t', \quad \mathbf{b}_t = \hat{\mathbf{d}}_t - \hat{\mathbf{B}}_t \mathbf{D}_{t-1}^{-1} \mathbf{b}_{t-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}_t = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t + \mathbf{D}_t^{-1} \hat{\mathbf{B}}_t' \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{t+1}, \\ \hat{\mathbf{y}}_t &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_t + \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{b}_t, \quad \mathbf{Z}_t = \mathbf{I}_p + \mathbf{D}_t^{-1} \hat{\mathbf{B}}_t' \boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{G}_t = [\mathbf{K}_t'^{-1}, \mathbf{D}_t^{-1} \hat{\mathbf{B}}_t' \mathbf{R}_t], \quad \mathbf{H}_t = [\mathbf{0}, \mathbf{R}_t], \end{aligned}$$

$t = s+1, \dots, s+m$ を計算して得られる。ここで $\mathbf{b}_s = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{B}}_{s+m+1} = \mathbf{O}$ であり、また、 \mathbf{K}_t は $\mathbf{D}_t = \mathbf{K}_t \mathbf{K}_t'$ を満たす \mathbf{D}_t のコレスキー分解である。

モード $\hat{\mathbf{x}}$ を求めるには、以下を収束するまで繰り返す。

[アルゴリズム A.1-a]

i (3.9) を用いて $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ から $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ を計算する。

ii 状態空間モデル (A.5) と (A.6) を計算する。

iii Koopman (1993) の誤差項平滑化を (ii) の状態空間モデルに対して行い、事後モード $\hat{\boldsymbol{x}}$ を得る。

この手続きは条件付事後密度関数 (A.1) に対するスコアリング法を用いた最大化を行っていることに等しい。 $\hat{\boldsymbol{x}}$ の初期値には MCMC のサンプリングにおける現在の \boldsymbol{x} の値を用いればよい。実際に計算するときには、事後分布の近似分布を得られれば良いので、上の操作を 5 から 10 回程度繰り返せばよい。次にモード $\hat{\boldsymbol{x}}$ を用いて得られた近似線型ガウス状態空間モデル (A.5) と (A.6) を用いて候補 \boldsymbol{x} を発生し、以下の ARMH アルゴリズムを用いて発生させる。

[アルゴリズム A.1-b]

1. 候補となる点 \boldsymbol{x}^\dagger を $q(\boldsymbol{x}^\dagger) \propto \min(f(\boldsymbol{x}^\dagger), cf^*(\boldsymbol{x}^\dagger))$ から AR アルゴリズムを用いて発生させる。ここで c は近似をした正規密度の定数項と \hat{L} を使って計算できる。

(a) $\boldsymbol{x}^\dagger \sim f^*$ をシミュレーション平滑化 (de Jong and Shephard (1995), Durbin and Koopman (2002) など) を近似線型ガウス状態空間モデル (A.5) と (A.6) に適用して発生させる。

(b) \boldsymbol{x}^\dagger を確率 $\min\left\{\frac{f(\boldsymbol{x}^\dagger)}{cf^*(\boldsymbol{x}^\dagger)}, 1\right\}$ で採択し、棄却されたら (a) に戻る。

2. 現在の点を \boldsymbol{x} とする。新たな候補点 \boldsymbol{x}^\dagger を確率

$$\min\left\{1, \frac{f(\boldsymbol{x}^\dagger) \min(f(\boldsymbol{x}), cf^*(\boldsymbol{x}))}{f(\boldsymbol{x}) \min(f(\boldsymbol{x}^\dagger), cf^*(\boldsymbol{x}^\dagger))}\right\}$$

で採択する。棄却された場合は現在の点 \boldsymbol{x} をそのままにする。

また、提案分布の正規近似がうまくいかないときには、AR ステップが抜けられない場合が起こりうる。そういった状況が起こる場合には、AR ステップを省略した通常の MH アルゴリズムを用いて以下のようにサンプリングすることもできる。

[アルゴリズム A.1-c]

1. 候補となる点 $\boldsymbol{x}^\dagger \sim f^*$ をシミュレーション平滑化 (de Jong and Shephard (1995), Durbin and Koopman (2002) など) を近似線型ガウス状態空間モデル (A.5) と (A.6) に適用して発生させる。

2. 現在の点を \boldsymbol{x} とする。新たな候補点 \boldsymbol{x}^\dagger を確率

$$\min\left\{1, \frac{f(\boldsymbol{x}^\dagger)f^*(\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})f^*(\boldsymbol{x}^\dagger)}\right\},$$

で採択する。棄却された場合は現在の点 \boldsymbol{x} をそのままにする。

こちらを使う場合には ARMH を使うよりも若干標本の自己相関は大きくなるものの計算時間の意味で短時間で終わる場合もある。

ステップ 2 は $\Sigma_{\varepsilon\eta} = \mathbf{O}$ の制約の有無で若干異なる。MASVt, MASVn の場合は、条件付事後分布

$$\begin{aligned}\pi(\Sigma|\phi, \alpha, \lambda, Y_n) &\propto |\Sigma|^{-\frac{n_1+2p+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{R}_1^{-1}\Sigma^{-1})\right\} \times g(\Sigma), \\ g(\Sigma) &= |\Sigma_0|^{-\frac{1}{2}}|\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha_1'\Sigma_0^{-1}\alpha_1 + \lambda_n\mathbf{y}_n'\mathbf{V}_n^{-1/2}\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1}\mathbf{V}_n^{-1/2}\mathbf{y}_n\right)\right\},\end{aligned}$$

ただし $n_1 = n_0 + n - 1$, $\mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_0^{-1} + \sum_{t=1}^{n-1} \mathbf{v}_t\mathbf{v}_t'$,

$$\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \lambda_t^{1/2}\mathbf{V}_t^{-1/2}\mathbf{y}_t \\ \alpha_{t+1} - \Phi\alpha_t \end{pmatrix}.$$

である。したがって提案分布 $\Sigma^\dagger \sim \mathcal{IW}(n_1, \mathbf{R}_1)$ からサンプリングし、採択確率 $\min\{g(\Sigma^\dagger)/g(\Sigma), 1\}$ とする独立 Metropolis-Hastings(MH) アルゴリズムを行う。

MSVt, MSVn の場合は、 $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$, $\Sigma_{\eta\eta}$ の条件付事後分布が

$$\begin{aligned}\pi(\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|\phi, \alpha, \lambda, Y_n) &\propto |\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}|^{-\frac{n_1^\varepsilon+p+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{R}_1^{\varepsilon-1}\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-1})\right\} \\ \pi(\Sigma_{\eta\eta}|\phi, \alpha, \lambda, Y_n) &\propto |\Sigma_{\eta\eta}|^{-\frac{n_1^\eta+p+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{R}_1^{\eta-1}\Sigma_{\eta\eta}^{-1})\right\} \times g_\eta(\Sigma_{\eta\eta}), \\ g_\eta(\Sigma_{\eta\eta}) &= |\Sigma_0|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha_1'\Sigma_0^{-1}\alpha_1)\right\},\end{aligned}$$

ただし $n_1^\varepsilon = n_0^\varepsilon + n$, $\mathbf{R}_1^{\varepsilon-1} = \mathbf{R}_0^{\varepsilon-1} + \sum_{t=1}^n \lambda_t\mathbf{V}_t^{-1/2}\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t'\mathbf{V}_t^{-1/2}$, $n_1^\eta = n_0^\eta + n - 1$, $\mathbf{R}_1^{\eta-1} = \mathbf{R}_0^{\eta-1} + \sum_{t=1}^{n-1}(\alpha_{t+1} - \Phi\alpha_t)(\alpha_{t+1} - \Phi\alpha_t)'$ である。

よって $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ については $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} \sim \mathcal{IW}(n_1^\varepsilon, \mathbf{R}_1^{\varepsilon})$ からギブスサンプラーを行い、 $\Sigma_{\eta\eta}$ については提案分布から $\Sigma_{\eta\eta}^\dagger \sim \mathcal{IW}(n_1^\eta, \mathbf{R}_1^\eta)$ から発生した候補 $\Sigma_{\eta\eta}^\dagger$ を確率 $\min\{g(\Sigma_{\eta\eta}^\dagger)/g(\Sigma_{\eta\eta}), 1\}$ で採択する MH アルゴリズムを行う。

ステップ 3 では、 ϕ の条件付事後分布が

$$\begin{aligned}\pi(\phi|\Sigma, \alpha, Y_n) &\propto h(\phi) \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi - \mu_\phi)'\Sigma_\phi^{-1}(\phi - \mu_\phi)\right\}, \\ h(\phi) &= |\Sigma_0|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^p (1 + \phi_j)^{a_j-1} (1 - \phi_j)^{b_j-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_1'\Sigma_0^{-1}\alpha_1\right\},\end{aligned}$$

である。ただし $\mu_\phi = \Sigma_\phi\mathbf{b}$, $\Sigma_\phi^{-1} = \Sigma^{22} \odot (\sum_{t=1}^{n-1} \alpha_t\alpha_t')$ とし、 \mathbf{b} は行列 $\sum_{t=1}^{n-1}\{\alpha_t\lambda_t^{1/2}\mathbf{y}_t'\mathbf{V}_t^{-1/2}\Sigma^{12} + \alpha_t\alpha_{t+1}'\Sigma^{22}\}$ の対角要素を並べたベクトルである。また Σ^{ij} を Σ^{-1} の第 (i, j) ブロックの $p \times p$ 行列を意味し、 \odot は Hadamard 積を意味するとする。そこで提案分布としては $\phi^\dagger \sim \mathcal{TN}_R(\mu_\phi, \Sigma_\phi)$, $R = \{\phi : |\phi_j| < 1, j = 1, \dots, p\}$ をもちいて確率 $\min\{h(\phi^\dagger)/h(\phi), 1\}$ で採択する独立 MH アルゴリズムを行う。

ステップ4では、 λ_t の条件付事後分布が

$$\pi(\lambda_t | \phi, \Sigma, \nu, \alpha, Y_n) \propto \lambda_t^{\frac{\nu+p}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{c_t}{2} \lambda_t + d_t \sqrt{\lambda_t} \right\},$$

ここで $c_t = \nu + \mathbf{y}_t' \Sigma_t^{-1} \mathbf{y}_t$, $d_t = \mathbf{y}_t' \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{\mu}_t$ である。そこで提案分布 $\lambda_t^\dagger \sim \mathcal{G}((\nu+p)/2, c_t/2)$ から候補を生成し、採択確率

$$\min \left[1, \exp \left\{ d_t \left(\sqrt{\lambda_t^\dagger} - \sqrt{\lambda_t} \right) \right\} \right],$$

で採択するMHアルゴリズムでサンプリングする。ただし $t = n$ については $d_n = 0$ となるため $\lambda_n \sim \mathcal{G}((\nu+p)/2, c_n/2)$ からのギブスサンプラーとなる。

最後にステップ5では、 ν の条件付事後分布が

$$\pi(\nu | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n) \propto \pi(\nu) \left\{ \frac{(\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right\}^n \left(\prod_{t=1}^n \lambda_t \right)^{\frac{\nu}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n \lambda_t \nu}{2} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

となる。ここでは ν を $\vartheta_\nu = \log \nu$ と変換し、MHアルゴリズムを用いて乱数生成を行う。 $\hat{\vartheta}_\nu$ を $\pi(\vartheta_\nu | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n)$ のモードとする。対数条件付事後密度のテーラー展開を $\hat{\vartheta}_\nu$ の周りで行い、近似をした正規分布 $\vartheta_\nu^\dagger \sim \mathcal{N}(\mu_\nu, \sigma_\nu^2)$ を提案分布として用いて候補を発生させる。ただし、

$$\begin{aligned} \mu_\nu &= \hat{\vartheta}_\nu + \sigma_\nu^2 \left[\frac{\partial \log \pi(\vartheta_\nu | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n)}{\partial \vartheta_\nu} \Big|_{\vartheta_\nu = \hat{\vartheta}_\nu} \right], \\ \sigma_\nu^2 &= \left[-\frac{\partial^2 \log \pi(\vartheta_\nu | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n)}{\partial \vartheta_\nu^2} \Big|_{\vartheta_\nu = \hat{\vartheta}_\nu} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

である。その採択確率は

$$\min \left[\frac{\pi(\vartheta_\nu^\dagger | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n) f_N(\vartheta_\nu | \mu_\nu, \sigma_\nu^2)}{\pi(\vartheta_\nu | \phi, \Sigma, \lambda, \alpha, Y_n) f_N(\vartheta_\nu^\dagger | \mu_\nu, \sigma_\nu^2)}, 1 \right],$$

となる。ただし $f_N(x | \mu, \sigma^2)$ は平均 μ 分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数を点 x で評価した値である。

参考文献

- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001). The distribution of stock return volatility, *J. Financ. Econ.*, **61**, 43–76.
- Asai, M., McAleer, M. and Yu, J. (2006). Multivariate stochastic volatility: a review, *Econom. Rev.*, **25**, 145–175.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **63**, 167–241.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Neil Shephard (2008). Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrica*, **76**, 1481–536.
- Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH: a survey, *J. Appl. Econ.*, **21**, 79–109.

- Chib, S. (2001). Markov chain Monte Carlo methods: computation and inference, *Handbook of Econometrics 5* (eds. J. J. Heckman and E. Leamer), pp. 3569–3649, Amsterdam, North-Holland.
- Chib, S. and Jeliazkov, I. (2001). Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings output, *J. Am. Stat. Assoc.*, **96**, 270–281.
- Chib, S., Nardari, F. and Shephard, N. (2006). Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models, *J. Econom.*, **134**, 341–371.
- Chib, S., Omori, Y. and Asai, M. (2009). Multivariate stochastic volatility, *Handbook of Financial Time Series* (eds. T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss and T. Mikosch), pp. 365–400, New York, Springer-Verlag.
- Doornik, J. A. (2006). *Ox: Object Oriented Matrix Programming*, London, Timberlake Consultants Press.
- Durbin, J. and Koopman, S. J. (2002). A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis, *Biometrika*, **89**, 603–616.
- Engle, R. F. and Gallo, G. M. (2006). A multiple indicators model for volatility using intra-daily data, *J. Econom.*, **131**, 3–27.
- Frühwirth-Schnatter, S. (2004). Estimating marginal likelihoods for mixture and Markov switching model using bridge sampling techniques, *The Econometrics Journal*, **7**, 143–167.
- Geweke, J. (1999). Using simulation methods for Bayesian econometric models: inference, development and communication, *Econom. Rev.*, **18**, 1–126.
- Gourieroux, C., Jasiak, J. and Sufana, R. (2009). The Wishart autoregressive process of multivariate stochastic volatility, *J. Econom.*, **150**, 167–181.
- Green, P. J. (1995). Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, *Biometrika*, **82**, 711–732.
- Hansen, P. R., Huang, Z(A). and Shek, H. H. (2010). Realized GARCH: a complete model of returns and realized measures of volatility, Working Papers, <http://ssrn.com/abstract=1533475>.
- 伊庭 幸人, 種村 正美, 大森 裕浩, 和合 肇, 佐藤 整尚, 高橋 昭彦 (2005). 『計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』第 12 巻, 統計科学のフロンティア, 岩波書店.
- Ishihara, T. and Omori, Y. (2011). Efficient Bayesian estimation of a multivariate stochastic volatility model with cross leverage and heavy-tailed errors, *Comput. Stat. Data Anal.*, in press.
- Jacquier, E., Polson, N. G. and Rossi, P. E. (1994). Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion), *J. Bus. Econ. Stat.*, **12**, 371–389.
- Johansen, A. M. and Doucet, A. (2008). A note on auxiliary particle filters, *Stat. Probab. Lett.*, **78**, 1498–1504.
- de Jong, P. and Shephard, N. (1995). The simulation smoother for time series models, *Biometrika*, **82**, 339–350.
- 粕谷 宗久, 高川 泉 (2005). 「実質為替レートの中期予測におけるモデルの不確実性」和合肇 (編) 『ベイズ計量経済分析マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.
- Kim, S., Shephard, N. and Chib, S. (1998). Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models, *Rev. Econ. Stud.*, **65**, 361–393.
- 小西 貞則, 越智 義道, 大森 裕浩 (2008). 『計算統計学の方法: ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC』朝倉書店.
- Koopman, S. J. (1993). Disturbance smoother for state space models, *Biometrika*, **80**, 117–126.
- 古澄 英男 (2009). 「マルコフ連鎖モンテカルロ法入門」国友 直人・山本 拓・北川 源四郎・竹村 彰通 (編) 『21 世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』東京大学出版会.
- Kroner, K. F. and Ng, V. K. (1998). Modeling asymmetric comovements of asset returns, *Review of Financial Studies*, **11**, 817–844.
- Meng, X.-L. and Wong, W. H. (1996). Simulating ratios of normalizing constants via a simple identity: a theoretical exploration, *Statistica Sinica*, **6**, 831–860.
- Nakajima, J. and Watanabe, T. (2011). Bayesian analysis of time-varying parameter vector autoregressive model with the ordering of variables for the Japanese economy and monetary policy, unpublished manuscript.
- 中妻 照雄 (2007). 『入門ベイズ統計学』朝倉書店.
- 大森 裕浩 (2001). 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」『日本統計学会誌』**31**, 305–344.
- 大森 裕浩 (2007). 「多変量因子確率的ポラティリティ変動モデル」『経済研究』**58**, 335–351.

- Omori, Y. and Watanabe, T. (2008). Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models, *Comput. Stat. Data Anal.*, **52**(6), 2892–2910.
- Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007). Stochastic volatility with leverage: fast likelihood inference, *J. Econom.*, **140**, 425–449.
- Philipov, A. and Glickman, M. E. (2006). Multivariate stochastic volatility via Wishart processes, *J. Bus. Econ. Stat.*, **24**, 313–328.
- Pigorsch, C. and Stelzer, R. (2009). A multivariate Ornstein-Uhlenbeck type stochastic volatility model, <http://www-m4.ma.tum.de>. より利用可能.
- Pitt, M. K. and Shephard, N. (1999). Time varying covariances: a factor stochastic volatility approach, *Bayesian Statistics 6* (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith), pp. 547–570, Oxford, Oxford University Press.
- Shephard, N. (2005). *Stochastic Volatility: Selected Readings*, Oxford, Oxford University Press.
- Shephard, N. and Pitt, M. K. (1997). Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, *Biometrika*, **84**, 653–667.
- Shephard, N. and Sheppard, K. (2010). Realising the future: forecasting with high frequency based volatility (HEAVY) models, *J. Appl. Econ.*, **25**, 197–231.
- Silvennoinen, A. and Terrasvirta, T. (2007). Multivariate GARCH models, *Handbook of Financial Time Series* (eds. T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss and T. Mikosch), New York, Springer.
- So, M. K. P. (2006). Bayesian analysis of nonlinear and non-Gaussian state space models via multiple-try sampling methods, *Stat. Comput.*, **16**(2), 712–735.
- So, M. K. P. and Choi, C. Y. (2009). A threshold factor multivariate stochastic volatility model, *J. Forecast.*, **28**(8), 712–735.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. and van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit (with discussion), *J. R. Stat. Soc., Ser. B*, **64**, 583–639.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009). Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Comput. Stat. Data Anal.*, **53**, 2404–2426.
- 竹内(野木森) 明日香 (2009). 「個別株式ボラティリティの長期記憶性と非対称性」早稲田大学産業経営研究所ワーキングペーパー 2009 年 第 1 号.
- 谷崎 久志 (2010). 「株価，為替，金利のボラティリティの変動要因・相互依存関係について：ノンパラメトリック推定の応用」『国民経済雑誌』**201**, 15–28.
- Tanizaki, H. and Hamori, S. (2009). Volatility transmission between Japan, UK and USA in daily stock returns, *Empirical Economics*, **36**(1), 27–54.
- Vrontos, I. D., Dellaportas, P. and Politis, D. N. (2000). Full Bayesian inference for GARCH and EGARCH models, *J. Bus. Econ. Stat.*, **18**, 187–198.
- 和合 肇編著 (2005). 『ベイズ計量経済分析-マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.
- Watanabe, T. and Omori, Y. (2004). A multi-move sampler for estimating non-Gaussian times series models: Comments on Shephard and Pitt (1997), *Biometrika*, **91**, 246–248.
- Yu, J. and Meyer, R. (2006). Multivariate stochastic volatility models: Bayesian estimation and model comparison, *Econom. Rev.*, **25**, 361–384.