

観測誤差を伴う DSGE モデルの推定における 複合 MCMC 法およびシミュレーションスムーザの適用

松前 龍宜*・飯星 博邦†・難波 了一‡・西山 慎一§

An Application of Hybrid MCMC and Simulation Smoother in Estimating a DSGE Model with Measurement Errors

Tatsuyoshi Matsumae*, Hirokuni Iiboshi†,
Ryoichi Namba‡ and Shin-Ichi Nishiyama§

観測誤差を持つ DSGE モデルの推定法として, Boivin and Giannoni (2006) や Kryshko (2010) は Carter and Kohn (1994) による平滑法を採用した複合 MCMC 法を提案したが, 彼らの手法は一律に全ての DSGE モデルに適用できるわけではなく, モデル毎にアドホックな修正が必要となることが欠点であった. それに対し本稿は, de Jong and Shephard (1995) が提案したシミュレーションスムーザによる平滑法を有する複合 MCMC 法を利用して, 観測誤差を持つ DSGE モデルの汎用的な推定法を提示する. 日本のマクロデータを利用して, 観測誤差を持つ DSGE モデルの複合 MCMC 法による推定結果と, 観測誤差が無い DSGE モデルの従来の MH アルゴリズムによる推定結果を比較した結果, 両者の間には構造パラメータや構造ショックの推定結果, ならびに歴史分解の結果において無視し難い差異が生じることを示した. 最後に, ベイズファクターによりモデル選択を行った結果, 観測誤差を付加することは, DSGE モデルの推定精度あるいは予測精度を高めることに大きく寄与することが示された.

In estimating a DSGE model with measurement errors, Boivin and Giannoni (2006) and Kryshko (2010) proposed a hybrid MCMC based on Carter and Kohn's (1994) smoothing method. However, their approach cannot be applied to general class of DSGE models with measurement errors, but needs to be customized for each model in an ad-hoc manner. In this paper, we adopt a hybrid MCMC based on the simulation smoother method proposed by de Jong and Shephard (1995) which is applicable to general class of DSGE models with measurement errors. We then estimate a DSGE model with measurement errors using Japanese macro data and compare its empirical results with those from the same model but without measurement error. It turns out that the estimation results of structural parameters, structural shocks, and historical decompositions to be considerably different between the model with measurement errors and without measurement error. Finally, we compare two models using Bayes Factor and find the model with measurement errors to be favored very strongly which implies that the model with measurement errors to have significantly higher forecasting power over the model without measurement error.

キーワード: DSGE モデル, 観測誤差, 複合 MCMC 法, シミュレーションスムーザ.

* 内閣府経済社会総合研究所, 〒 100-8970 東京都千代田区霞が関 3-1-1 (E-mail: tatsuyoshi.matsumae@cao.go.jp).

† 首都大学東京大学院社会科学部研究科, 〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 (E-mail: iiboshi@tmu.ac.jp).

‡ 内閣府経済社会総合研究所, 〒 100-8970 東京都千代田区霞が関 3-1-1 (E-mail: ryoichi.nanba@cao.go.jp).

1. はじめに

1.1 DSGE モデルとは

近年のマクロ経済学の有力な分析フレームワークとして、確率的動学一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium model, 以下, DSGE モデル) がある。DSGE モデルは、家計や企業といった経済主体の動学的最適化行動を明示的に考慮するミクロ経済学的基礎を持つモデルであり、モデルの様々な外生ショックが景気循環あるいは物価変動をもたらす要因であると捉えているのが特徴である。さらに、DSGE モデルはこの景気循環あるいは物価変動をもたらす外生ショックを容易に識別できるという利点がある。それゆえ、景気循環の要因分析、あるいは政策シミュレーションのツールとして、各国の中央銀行ならびに政府機関において DSGE モデルの活用が急速に進展している。

また DSGE モデルは、定常状態近傍で対数線形近似して合理的期待均衡を求めると、線形の状態空間モデルとして表すことができる。すなわち、各経済主体の動学的最適化条件式ならびに制約条件式を連立差分方程式として定式化し、モデルの先決変数を状態変数と見做すことで状態空間モデルの遷移方程式として捉え、これに観測変数と状態変数の対応関係を規定した観測方程式を加えることで、DSGE モデルの状態空間表現が可能となる。それゆえ近年では、DSGE モデルの推定にあたり、マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo; MCMC) 法を利用したベイズ推定が盛んに行われている¹⁾。

DSGE モデルのベイズ推定を行った研究の嚆矢として、Smets and Wouters (2003, 2007) が挙げられる。彼らは、欧州および米国のデータを利用して DSGE モデルをベイズ推定し、データに対する DSGE のモデルフィットは、モデルに対する制約の緩いベクトル自己回帰 (vector autoregressive; VAR) モデルに比しても遜色がないことを示した。これを受けて、現在では多くの国々のマクロデータをもとに DSGE モデルの実証研究が行われている²⁾。

1.2 観測誤差の必要性

DSGE モデルの標準モデルとも呼ぶべき Smets and Wouters (2003, 2007) では、インフレ率や実質賃金といったデータの変動を、すべてモデルの構造ショックに起因するもの

[§] 東北大学大学院経済学研究科, 〒 980-8576 宮城県仙台市青葉区川内 27-1 (E-mail: nishiyama@econ.tohoku.ac.jp).

¹⁾ この理由として、藤原・渡部 (2011) が指摘しているように、MCMC の手法の急速な発展や Dynare という簡易推定ツールの普及の他に、(1) パラメータの事前分布に先行研究などの事前情報を盛り込むことができる点、(2) モデル選択では入れ子関係にないモデルでも行える点、(3) インパルス応答関数や分散分解、歴史分解 (Historical Decomposition) の計算にあたって、パラメータの事後分布からこれらの事後分布も作成できる点、(4) 将来の予測についてもパラメータの事後分布を使うことで予測分布を作成できる点、が挙げられる。

²⁾ 代表的なものとして、例えば Levin *et al.* (2005), Onatski and Williams (2010) など。一方、日本のマクロデータを利用した DSGE モデルの実証研究として、Iiboshi *et al.* (2006), Sugo and Ueda (2008), Yano (2009), Fueki *et al.* (2010) および Fujiwara *et al.* (2011) などが挙げられる。その他の国内外の文献については、DSGE モデルの最新理論と実証手法を包括的に展望した藤原・渡部 (2011) を参照のこと。

として捉えている。しかしながら、インフレ率や実質賃金といったデータの変動は、近年、慣性 (persistence) が失われてノイズのようなボラタイルな動きをますます示しており、予測が困難となっていることが Stock and Watson (2007), Cogley *et al.* (2010), Edge and Gürkaynak (2010) などによって指摘されている³⁾。

Smets and Wouters (2003, 2007) や Sugo and Ueda (2008) をはじめとする従来の DSGE モデルのベイズ推定では、インフレ率や実質賃金といった短期的にボラタイルな動きを示す傾向にあるデータを観測変数として取り扱う場合でも、観測誤差を想定せずに推定が行われてきた。その結果、DSGE モデルの状態変数の変動、とりわけインフレ率の変動は、価格のマークアップショックといった構造ショックのボラタイルな変動によってもたらされたと解釈されている。例えば、Smets and Wouters (2007) の長短期の分散分解の推定結果によれば、インフレ率の変動の大部分は、価格のマークアップショックの変動によって説明されると報告している。しかし、価格や賃金のマークアップショックは、中間財需要関数および労働需要関数のシフトパラメータに関わるショックであり、先行研究が指摘するようなボラタイルなショックとして捉えることは、経済学的な解釈の観点から困難が伴う⁴⁾。

他方で、インフレ率や実質賃金のデータに見られるボラタイルな変動をモデルの構造ショックとして捉えるのではなく、単にデータの観測誤差として捉えるアプローチも、近年徐々に試みられている。例えば、Justiniano and Primiceri (2008), Yano (2009), Fueki *et al.* (2010) は、インフレ率や賃金データの短期的にボラタイルな変動を観測誤差として捉えてモデル化を試みている。しかし、これらの先行研究の主眼は観測誤差導入の是非を問うことにあったわけではなく、あくまで副次的な試みの域を出ないものであった。

本稿では、DSGE モデル推定における観測誤差の役割について分析することを主眼とし、インフレ率や実質賃金以外のデータについても観測誤差の可能性を考慮する。さらに、従来においてはマークアップショック等の構造ショックとして捉えてきたインフレ率や実質賃金の変動を観測誤差に起因するものと理解して、Smets and Wouters 型の DSGE モデル

³⁾ Edge and Gürkaynak (2010) は、DSGE モデルと米国の中央銀行である FRB が従来利用してきたマクロモデルの予測精度を比較検討したところ、DSGE モデルの状態変数、とりわけインフレ率の 90 年代以降の変動がボラタイルになり、その挙動を予測する精度が低下していることを報告している。このようなマクロ経済変数における一時的なノイズに近い変動は DSGE モデルのベイズ推定以外の研究でも報告されており、Cogley *et al.* (2010) で推定された VAR モデルによると、90 年代以前のインフレ率の変動は慣性を伴うスムーズな変動だが、90 年代以降はノイズのようなボラタイルな動きを示し、ゆえにインフレ率の予測が困難であると結論付けている。また、Stock and Watson (2007) によれば、Dynamic Factor Model を用いた推定結果から、やはり 90 年代以降のインフレ率の変動はボラタイルであり、その変動を予測することは困難であると報告している。

⁴⁾ また、de Walque *et al.* (2006) によれば、価格のマークアップショックと相対価格ショックは観測上等価 (observational equivalent) になり、マークアップショックには識別問題が生じることが報告されている。Chari *et al.* (2009) はこの観点からニューケインジアン型 DSGE モデルを批判している。

に観測誤差を導入し推定を行う。

1.3 新しい推定法の提案

従来の DSGE モデルの MCMC 法としてメトロポリス-ヘイスティングズ (Metropolis-Hastings; MH) アルゴリズムが用いられてきたが、これは DSGE モデルの構造パラメータの推定に焦点が当てられ、観測されるデータ \mathbf{X}_t とマクロ経済の内生変数である状態変数 \mathbf{S}_t が確定的に結びついている ($\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{S}_t$) と仮定しており、状態変数の推定については考慮されてこなかった⁵⁾。しかし、本稿のモデルでは、観測誤差を導入したことにより、状態変数 \mathbf{S}_t とデータ \mathbf{X}_t とは確定的な関係にはないので ($\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{S}_t + \mathbf{e}_t$)、構造パラメータと併せて状態変数と観測誤差を推定しなくてはならない。この推定法として Boivin and Giannoni (2006) ならびに Kryshko (2010) は、AR(1) 過程をもつ観測誤差を想定した DSGE モデルに対して、複合 MCMC (hybrid MCMC) 法を提案し、状態変数の平滑法として Carter and Kohn (1994) の手法を採用した。

しかし、Carter and Kohn (1994) は、Chib (2001, p. 3614) でも指摘があるように、状態変数の分散共分散行列のサンプリング中に非正定値行列が発生することでサンプリングが中断してしまうという問題が生じる。そのため、先行研究ではアドホックに状態変数の分散共分散行列を設定し推定を行っている。本稿でも、Boivin and Giannoni (2006) と Kryshko (2010) に倣い、AR(1) 過程の観測誤差を伴う DSGE モデルを対象に、複合 MCMC (hybrid MCMC) 法を採用した。しかし、本稿では状態変数の平滑法として、de Jong and Shephard (1995) が提案したシミュレーションスムーザを採用することにより、非正定値行列の問題を克服した。観測誤差を伴う DSGE モデルの推定において、アドホックな分散共分散行列を置くことなく状態変数の推定を可能にしたことは、本稿の大きな貢献であろう。

加えて本稿では、上記推定法をもとに、日本のマクロ経済データを利用して、観測誤差を伴う DSGE モデルの推定を行い、その推定結果を観測誤差が無い DSGE モデルの推定結果と比較した。本論で後程示すように、観測誤差を伴う本稿の DSGE モデルと観測誤差を伴わない従来の DSGE モデルとでは、構造パラメータや構造ショック、ならびに歴史分解の結果において無視し難い差異が生じることがわかった。これは、実質賃金やインフレ率といったデータの短期的にボラタイルな動きを、モデルの構造ショックとして捉えるか、あるいは観測誤差として捉えるかという本質的なアプローチの違いから生じた推定結果の差であると理解できる。最後に、ベイズファクターによりモデル選択を行った結果、観測誤差ありのモデルの観測誤差なしのモデルに対するベイズファクターは極めて大きい値を

⁵⁾ DSGE モデルの実証研究の中には、観測誤差を含んだモデルに対しても MH アルゴリズムを採用したものがあるが、この場合、状態変数や構造ショックの事後分布からのサンプリングを行っていないので、これらの信用区間や、またこれらの事後分布を利用した歴史分解などの政策シミュレーションの事後分布も作成できない。本研究が採用する複合 MCMC 法によって、はじめてこれらの事後分布が作成できる。

示した。すなわち、日本のマクロ経済データに対して、観測誤差を付加することは Smets and Wouters 型の DSGE モデルの推定精度あるいは予測精度を高めることに大きく寄与することが示された。近年、インフレ率がよりノイズに近い動きを示して予測が困難となっていることが先行研究によって報告されていることから、今後の DSGE モデルの推定にあたっては観測誤差の導入を考慮すべきであり、そしてその推定の際にはシミュレーションスムーザによる平滑法を有する複合 MCMC 法が有用であるものとする。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では本稿で推定する DSGE モデルを提示する。3 節において複合 MCMC 法による DGSE モデルの推定手法、とりわけ観測誤差を導入した状態空間モデルと状態変数の平滑化の手法であるシミュレーションスムーザについて説明する。4 節では利用したデータとその加工方法およびパラメータの事前分布の設定について説明する。5 節で推定結果を示し、6 節は結語である。

2. ニューケインジアン型 DSGE モデル

本稿で推定する状態空間モデルは、Smets and Wouters (2003, 2007) および Christiano *et al.* (2005) で提案されたニューケインジアン型 DSGE モデルである。このモデルは、価格と賃金の名目硬直性というニューケインジアンの仮定に加え、投資の調整費用と消費の習慣形成といった実質硬直性を導入しており、各方程式は家計および企業の最適化行動から導かれるミクロ経済学的基礎をもつモデルである。

構造パラメータのベイズ推定を行うため、家計および企業の最適化の一階条件を定常状態近傍で対数線型化し、Sims (2002) の方法を利用して連立差分方程式の解（合理的期待均衡解）をもとめ、線型の状態空間モデルで表現する。以下では、Smets and Wouters (2003, 2007) で示された、家計および企業の最適化の一階条件を定常状態近傍で対数線型化した差分方程式をまとめる。なお以下の式において、ハット付きの変数は定常状態からの乖離（%単位）をあらわすものとする。

2.1 家計の最適化行動

(1) 消費のオイラー方程式：

$$\hat{c}_t = \frac{h}{1+h} \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{1+h} E_t \hat{c}_{t+1} - \frac{1-h}{(1+h)\sigma_c} (\hat{R}_t - E_t \hat{\Pi}_{t+1}) + \frac{1-h}{(1+h)\sigma_c} (u_t^c - E_t u_{t+1}^c) \quad (2.1)$$

ここで、 \hat{c}_t は消費、 \hat{R}_t は名目利子率、 $\hat{\Pi}_t$ はインフレ率、 u_t^c は AR(1) ショック、 E_t は期待値オペレータである。また、 σ_c は異時点間消費の代替弾力性の逆数、 $h \in [0, 1]$ は習慣形成の程度を表すパラメータである。 $h \neq 0$ の場合、現在の最適な消費は、来期の消費のみならず、消費の習慣形成から過去の消費にも依存し、 h は前期と来期の消費のウェイトを表している。さらに消費は事前の実質利子率の減少関数であるが、その程度は、消費の異時点間代替の弾力性のみならず習慣形成パラメータにも依存することとなる。 u_t^c は、 $u_t^c = \rho^c u_{t-1}^c + \varepsilon_t^c$

の AR(1) 過程にしたがうものとし、 ε_t^c は選好ショック、 ρ^c はその慣性をあらわす。

(2) 投資のオイラー方程式：

$$\widehat{inv}_t = \frac{1}{1+\beta} \widehat{inv}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \widehat{inv}_{t+1} + \frac{\varphi}{1+\beta} \hat{q}_t + \frac{\beta}{1+\beta} (E_t u_{t+1}^{inv} - u_t^{inv}) \quad (2.2)$$

ここで、 \widehat{inv}_t は投資、 \hat{q}_t は資本財のシャドウプライス、 u_t^{inv} は AR(1) ショック、 β は主観的割引因子、 $1/\varphi$ は投資の調整費用に関わるパラメータである。投資の調整費用のために、現在の最適な投資量は、来期の投資量のみならず過去の投資量にも依存することとなる。 u_t^{inv} は $u_t^{inv} = \rho^{inv} u_{t-1}^{inv} + \varepsilon_t^{inv}$ の AR(1) ショックであり、 ε_t^{inv} は投資財固有の生産性ショック、 ρ^{inv} はその慣性である。

(3) 資産価格の決定式：

$$\hat{q}_t = -(\hat{R}_t - E_t \hat{\Pi}_{t+1}) + \frac{1-\tau}{1-\tau+\bar{r}^k} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\bar{r}^k}{1-\tau+\bar{r}^k} E_t \hat{r}_{t+1}^k + \varepsilon_t^q \quad (2.3)$$

ここで、 \hat{r}_t^k は資本の実質収益率、 ε_t^q はエクイティプレミアムショック、 τ は資本減耗率、 \bar{r}^k は資本の実質レンタル率の定常値をあらわす。資産のシャドウプライスである \hat{q}_t は、事前の実質利率の減少関数であり、一期先の資本の実質収益率および資産価格の期待値の増加関数となる。このモデルでは、エクイティプレミアムショック、 ε_t^q を導入することで投資収益率が変化し、それに応じて家計が保有する資産価格も変化することとなる。なお、エクイティプレミアムショックに慣性は無く、i.i.d. ショックと仮定する。

(4) 労働供給式：

$$\hat{w}_t = \frac{\beta}{1+\beta} E_t \hat{w}_{t+1} + \frac{1}{1+\beta} \hat{w}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \hat{\Pi}_{t+1} - \frac{1+\beta\gamma_w}{1+\beta} \hat{\Pi}_t + \frac{\gamma_w}{1+\beta} \hat{\Pi}_{t-1} \quad (2.4)$$

$$- \frac{\lambda_w(1-\beta\xi_w)(1-\xi_w)}{(1+\beta)(\lambda_w+(1+\lambda_w)\sigma_L)\xi_w} \left[\hat{w}_t - \sigma_L \hat{l}_t - \frac{\sigma_c}{1-h} (\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1}) - u_t^L - \varepsilon_t^w \right]$$

ここで、 \hat{w}_t は実質賃金、 \hat{l}_t は労働供給、 u_t^L は労働供給の AR(1) ショック、 ε_t^w は賃金のマークアップショックをあらわす。また、 ξ_w は賃金を改定できない確率（賃金のカルボパラメータ）、 λ_w は労働需要の賃金弾力性に関するパラメータ（賃金のマークアップ率のパラメータ）、 σ_L は労働供給の賃金弾力性、 γ_w は名目賃金のインフレ率との連動の程度をあらわすパラメータ（賃金のインデクセーションパラメータ）である。現在の実質賃金 \hat{w}_t が前期の実質賃金に依存する理由は、家計が最適に賃金を設定できない場合、自らの賃金を前期のインフレ率に連動させる契約を企業と結んでいると仮定しているためである。最後の項の括弧内は、実質賃金と余暇・消費の限界代替率の乖離を表している。全ての家計が

伸縮的に賃金を設定できる場合、この限界代替率と賃金が等しくなるように労働供給を最適に決定する。しかしここでは名目賃金を伸縮的に改訂できない家計がいるために、実質賃金と限界代替率に乖離が生じることとなる。 u_t^L は、 $u_t^L = \rho^L u_{t-1}^L + \varepsilon_t^L$ の AR(1) ショックであり、 ε_t^L は労働供給ショック、 ρ^L はその慣性である。

(5) 資本の遷移式:

$$\hat{K}_t = (1 - \tau)\hat{K}_{t-1} + \tau \widehat{inv}_{t-1} \quad (2.5)$$

ここで、 \hat{K}_t は資本をあらわす。ここで資本減耗率 τ は、投資・資本比率 $\overline{I/K}$ の定常値と等しくなることに注意されたい。

2.2 企業の最適化行動

(6) 費用最小化条件:

$$\hat{l}_t = -\hat{w}_t + (1 + \psi)\hat{r}_t^k + \hat{K}_{t-1} \quad (2.6)$$

ここで、 ψ は資本稼働率の費用に関するパラメータである。資本を所与とすると、労働需要は実質賃金の減少関数であり、資本のレンタル率の増加関数となる。

(7) 生産関数:

$$\hat{y}_t = \phi \hat{u}_t^a + \phi \alpha \hat{K}_{t-1} + \phi \alpha \psi \hat{r}_t^k + \phi(1 - \alpha)\hat{l}_t \quad (2.7)$$

ここで、 \hat{y}_t は産出、 α は資本分配率、 $\phi - 1$ は生産の固定費用のシェア、 \hat{u}_t^a は TFP ショックをあらわす。

(8) ニューケインジアン・フィリップス曲線:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_t = & \frac{\beta}{1 + \beta\gamma_p} E_t \hat{\Pi}_{t+1} + \frac{\gamma_p}{1 + \beta\gamma_p} \hat{\Pi}_{t-1} \\ & + \frac{(1 - \beta\xi_p)(1 - \xi_p)}{(1 + \beta\gamma_p)\xi_p} [\alpha \hat{r}_t^k + (1 - \alpha)\hat{w}_t - u_t^a + \varepsilon_t^p] \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで、 $\hat{\Pi}_t$ はインフレ率、 ε_t^p は価格のマークアップショック、 ξ_p は価格を改定できない確率（価格のカルボパラメータ）、 γ_p は価格をインフレ率に連動させる程度をあらわすパラメータ（価格のインデクセーションパラメータ）をあらわす。現在のインフレ率は、前期、来期のインフレ率と現在の限界費用に依存して決まる。最後の項の括弧内は生産の限界費用をあらわし、限界費用は資本の実質レンタル率、実質賃金および TFP ショックに依存して決まる。また、現在のインフレ率が過去のインフレ率に依存する理由は、実質賃金と同様、価格を最適に改定できない企業が、予めインフレ率と連動させる契約を結んでいるためである。 $\gamma_p = 0$ の場合、標準的なフォワードルッキングなフィリップス曲線に戻る。

着する。換言すれば、 γ_p はどれほどインフレの慣性が高いかをあらわすパラメータと言える。限界費用に対するインフレ率の弾力性は、カルボパラメータ、 ξ_p に依存する。

2.3 その他の均衡条件

(9) 財市場の均衡条件:

$$\hat{y}_t = (1 - \tau k_y - g_y)\hat{c}_t + \tau k_y \widehat{inv}_t + \bar{r}_t^k \psi k_y \hat{r}_t^k + g_y u_t^g \quad (2.9)$$

ここで、 \hat{g}_t は財政支出、 u_t^g は財政支出の AR(1) ショックであり、 k_y は資本・産出比率の定常値、 g_y は財政支出・産出比率の定常値をあらわす。 u_t^g は $u_t^g = \rho^g u_{t-1}^g + \varepsilon_t^g$ の AR 過程にしたがい、 ε_t^g は財政支出ショック、 ρ^g はその慣性をあらわす。

(10) 金融政策ルール:

$$\hat{R}_t = \rho_m \hat{R}_{t-1} + (1 - \rho_m) \left[\mu_\pi \hat{\Pi}_{t-1} + \mu_y \hat{y}_t \right] + \varepsilon_t^m \quad (2.10)$$

ここで、 ε_t^m は金融政策ショック、 μ_π 、 μ_y はそれぞれインフレ率および産出ギャップに対応するテイラールールのパラメータ、そして ρ_m は利子率の平滑化の程度をあらわすパラメータである。金融当局は上記の標準的なテイラールールにしたがい、名目利子率をコントロールするものとする。また、金融政策ショック、 ε_t^m は i.i.d. ショックとする。

2.4 AR ショックと予測誤差

前節の連立差分方程式に導入された 5 種類のショックは、それぞれ i.i.d.-normal な構造ショックを伴う以下の AR(1) 過程にしたがうものと仮定する。

$$\begin{aligned} u_t^c &= \rho^c u_{t-1}^c + \varepsilon_t^c, \quad u_t^{inv} = \rho^{inv} u_{t-1}^{inv} + \varepsilon_t^{inv}, \quad u_t^L = \rho^L u_{t-1}^L + \varepsilon_t^L, \\ u_t^a &= \rho^z u_{t-1}^a + \varepsilon_t^a, \quad u_t^g = \rho^g u_{t-1}^g + \varepsilon_t^g. \end{aligned}$$

ここで、(11) ε_t^c : 選好ショック、(12) ε_t^{inv} : 投資財固有の生産性ショック、(13) ε_t^L : 労働供給ショック、(14) ε_t^a : TFP ショック、(15) ε_t^g : 財政支出ショック、である。加えて、6 種類の予測誤差が存在する。

$$\begin{aligned} \eta_t^\pi &= \hat{\pi}_t - E_{t-1} \hat{\pi}_t, \quad \eta_t^w = \hat{w}_t - E_{t-1} \hat{w}_t, \quad \eta_t^q = \hat{q}_t - E_{t-1} \hat{q}_t, \\ \eta_t^{inv} &= \widehat{inv}_t - E_{t-1} \widehat{inv}_t, \quad \eta_t^c = \hat{c}_t - E_{t-1} \hat{c}_t, \quad \eta_t^{rk} = \hat{r}_t^k - E_{t-1} \hat{r}_t^k. \end{aligned}$$

ここで、(16) η_t^π : インフレ率の予測誤差、(17) η_t^w : 実質賃金の予測誤差、(18) η_t^q : エクイティプレミアム予測誤差、(19) η_t^{inv} : 投資財固有の生産性の予測誤差、(20) η_t^c : 消費の予測誤差、(21) η_t^{rk} : 実質レンタル率の予測誤差、である。

2.5 構造型表現

各経済主体の動学的最適化条件式ならびに制約条件式を定常状態近傍で対数線形化した連立差分方程式は、以下のような構造型で表現できる。

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_t = \mathbf{B}\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.11)$$

ここで、 \mathbf{S}_t は状態変数ベクトル： $\mathbf{S}_t = [\hat{y}_t, \hat{\pi}_t, \hat{w}_t, \hat{k}_t, \widehat{inv}_t, \hat{q}_t, \hat{c}_t, \hat{R}_t, \hat{r}_t^k, \hat{L}_t, E_t\hat{\pi}_{t+1}, E_t\hat{w}_{t+1}, E_t\hat{q}_{t+1}, E_t\widehat{inv}_{t+1}, E_t\hat{c}_{t+1}, E_t\hat{r}_{t+1}^k, u_t^c, u_t^{inv}, u_t^L, u_t^a, u_t^g]'$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ は構造ショックベクトル： $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t^c, \varepsilon_t^{inv}, \varepsilon_t^a, \varepsilon_t^L, \varepsilon_t^w, \varepsilon_t^a, \varepsilon_t^p, \varepsilon_t^g, \varepsilon_t^m]'$ 、 $\boldsymbol{\eta}_t$ は予測誤差ベクトル： $\boldsymbol{\eta}_t = [\eta_t^r, \eta_t^w, \eta_t^a, \eta_t^{inv}, \eta_t^c, \eta_t^{rk}]'$ である。また、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、および \mathbf{D} は、構造パラメータであらわされる行列である。

3. 推定法

本節では観測誤差を導入した状態空間モデルの推定手法について考察する。以下では構造パラメータを $\boldsymbol{\theta}$ とおき、同様に状態変数 \mathbf{S}_t を $J \times 1$ ベクトル、構造ショック $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ を $M \times 1$ ベクトル、観測変数 \mathbf{X}_t を $N \times 1$ ベクトルとおき、また $\mathbf{S}^T = \{\mathbf{S}_i\}_{i=1}^T$ 、 $\mathbf{X}^T = \{\mathbf{X}_j\}_{j=1}^T$ と表記する。ただし本稿では状態変数と観測変数の関係が $J \geq N$ となるケースに限定する⁶⁾。

3.1 状態空間表現

前節の構造型であらわされた DSGE モデルを、Sims (2002) の方法を用いて合理的期待均衡をもとめ、誘導型に変換する⁷⁾。この観測誤差をもつ DSGE モデルの誘導型は次のような状態変数 \mathbf{S}_t による自己回帰モデルである遷移方程式と観測変数 \mathbf{X}_t を状態変数によって説明する観測方程式の 2 式から成る状態空間モデルとして表現される。

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}_t + \mathbf{e}_t, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}_t = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{e}_{t-1} + \boldsymbol{\nu}_t, \quad \boldsymbol{\nu}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}), \quad (3.3)$$

ここで、(3.1) は状態空間モデルの遷移方程式であり、これが DSGE モデルの合理的期待均衡から導出された誘導型である。(3.2) は観測方程式であり、観測誤差 \mathbf{e}_t は $N \times 1$ ベクトルである。これは (3.3) に示されるように AR(1) 過程にしたがうものとする。なお、主成分分析では、(3.2) 式において、 $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}_t$ の部分を共通成分 (common component) といい、観測誤差 \mathbf{e}_t を独自成分 (idiosyncratic component) と呼んでいる。共通成分は、各内生変

⁶⁾ $J < N$ のケースはデータリッチ型 DSGE モデルとよばれ、Boivin and Giannoni (2006), Kryshko (2010), Schorfheide *et al.* (2010), Iiboshi *et al.* (2011), Nishiyama *et al.* (2011) による分析が行われている。

⁷⁾ 合理的期待均衡の導出方法には、本稿が採用した Sims の方法以外にも、Blanchard and Kahn (1980) が提案した方法、Christiano (2002) が提案した未定乗数法がある。詳しくは藤原・渡部 (2011) を参照のこと。

数間の相互相関関係 (inter-correlation) による変動をあらわし (すなわち構造ショックにより, 共通に変動 (co-movement) する部分をあらわし), 独自成分は, 他の変数とは独立に変動する成分である⁸⁾. 本稿ではこの e_t に対して観測誤差という表現をつかうが, 主成分分析の解釈にならない, 構造ショックの変動によらずに各変数が独自に変動する成分を意味するものとする. また, このモデルではすべての状態変数が観測されているわけではなく, 一部のみ観測誤差をもつ観測変数として観察されると想定しているので,

$$X_{it} = S_{it} + e_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

として定式化され, したがって, Λ は

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

となる. ただし, I は $N \times N$ の単位行列であり, $\mathbf{0}$ は $N \times (J - N)$ のゼロベクトルである. 構造ショック ε_t は $\varepsilon_t \sim iid N(\mathbf{0}, Q(\theta))$ にしたがう, また観測誤差 e_t の攪乱項 ν_t は $\nu_t \sim iid N(\mathbf{0}, R)$ にしたがう, それぞれの分散共分散行列 Q, R は正定値かつ対角行列である. (3.3) の係数 Ψ も対角行列であるとする. したがって観測誤差は横断面的制約では無相関であり, 時系列的制約では AR(1) の自己相関をもつと仮定している. また, $G(\theta), H(\theta)$ および構造ショックの分散共分散行列 $Q(\theta)$ は, 構造パラメータ θ の関数である.

(3.2) 式に (3.3) 式を代入することで, 観測方程式は次式として与えられる.

$$(I - \Psi L)X_t = (I - \Psi L)\Lambda(\theta)S_t + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(\mathbf{0}, R)$$

ここで, L はラグオペレータである. さらにこの式は, $\tilde{X}_t = X_t - \Psi X_{t-1}$, $\tilde{S}_t = [S'_t S'_{t-1}]'$ の表記を利用することで, 以下のように変形できる.

$$\tilde{X}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda & -\Psi\Lambda \end{bmatrix}}_{\tilde{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{S}_t} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N(\mathbf{0}, R), \quad (3.4)$$

同様に (3.1) 式の遷移方程式も次のように書き換えることができる.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{S}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} G(\theta) & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix}}_{\tilde{S}_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} H(\theta) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_H \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, Q(\theta)), \quad (3.5)$$

⁸⁾ モデルの特定化の誤り, およびモデルの状態変数に適切なデータを対応させていない, といった影響は観測誤差が吸収することになる. 例えば本研究は閉鎖経済モデルであるが, 為替レートの影響によるデータの変動分は, 観測誤差と捉えることになる.

ただし、 \mathbf{I} は $J \times J$ の単位行列である。以下で示す推定法では、これら (3.4), (3.5) の状態空間モデルに基づいて説明する。また、説明の便宜上、 $\mathbf{\Gamma}$ を $\mathbf{\Gamma} = \{\mathbf{\Psi}, \mathbf{R}\}$ とおき観測方程式のパラメータをあらわすこととする。

3.2 ベイズ推定法

本稿では観測誤差を導入した状態空間モデルのベイズ推定として、Boivin and Giannoni (2006) および Kryshko (2010) にしがたい、複合 MCMC (hybrid MCMC) 法、(あるいはギブス内メトロポリス (Metropolis-within-Gibbs) 法とも呼ばれる) を採用する⁹⁾。ただし、3.3 節で説明するシミュレーションスムーザの適用が先行研究との相違点であり本稿の提案でもある。

DSGE モデルの推定法として複合 MCMC 法を採用する利点は、状態変数をサンプリングしてこの事後分布が作成できるだけでなく、構造ショックの事後分布を作成できる点である。さらに、この事後分布を利用することで歴史分解などの政策シミュレーションにおける事後分布の作成にも適用できる点が重要である。他方で、従来の推定法である MH アルゴリズムでは、構造ショックの事後分布が作成できないので政策シミュレーションの推定値の信用区間が得られず、政策分析においては大きな欠点となるだろう。

本稿の状態空間モデルにおいて推定する対象は、構造パラメータ θ 、観測方程式のパラメータ $\mathbf{\Gamma}$ 、およびモデルの状態変数 \mathbf{S}^T である。なお、遷移方程式の $\mathbf{G}(\theta), \mathbf{H}(\theta), \mathbf{Q}(\theta)$ は構造パラメータ θ の関数であることに留意すれば、これら 3 つのパラメータと状態変数の $\theta, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{S}^T$ を推定すれば足りることがわかる。

パラメータ $\theta, \mathbf{\Gamma}$ のベイズ推定は、以下の手続きに則って実行される。

ステップ 1. パラメータ $\theta, \mathbf{\Gamma}$ の事前分布 $p(\theta, \mathbf{\Gamma})$ を設定する。ただし、 $p(\theta, \mathbf{\Gamma}) = p(\theta|\mathbf{\Gamma})p(\mathbf{\Gamma})$ である。

ステップ 2. ベイズの定理を利用して、事前分布 $p(\theta, \mathbf{\Gamma})$ と尤度関数 $p(\mathbf{X}^T|\theta, \mathbf{\Gamma})$ に基づき事後分布 $p(\theta, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{X}^T)$ を算出する。

$$p(\theta, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{X}^T) = \frac{p(\mathbf{X}^T|\theta, \mathbf{\Gamma}) p(\theta, \mathbf{\Gamma})}{\int p(\mathbf{X}^T|\theta, \mathbf{\Gamma}) p(\theta, \mathbf{\Gamma}) d\theta d\mathbf{\Gamma}}. \quad (3.6)$$

ステップ 3. 事後分布 $p(\theta, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{X}^T)$ からパラメータ $\theta, \mathbf{\Gamma}$ の統計的代表的値を取得する。

⁹⁾ 複合 MCMC (hybrid MCMC) 法のアルゴリズムについては、中妻 (2003) の 6 章または Gamerman and Lopes (2006) の 6 章を参照のこと。

しかしながら、ステップ2において、状態空間モデル (3.4), (3.5) では、結合事後分布 $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{X}^T)$ から、同時にパラメータ $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Gamma}$ をサンプルするのは困難であり、以下のように構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と観測方程式のパラメータ $\boldsymbol{\Gamma}$ の2つの条件付事後分布からギブスサンプリングを行い、結合分布 $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{X}^T)$ をもとめることにする。

$$p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{X}^T), \quad p(\boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T),$$

さらに条件付事後分布 $p(\boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ をもとめるためには、以下で示されるアルゴリズムのステップ3でみるように、これを2つの条件付事後分布 $p(\mathbf{S}^T | \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$, $p(\boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ に分離しなくてはならない。条件付事後分布 $p(\mathbf{S}^T | \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ からの状態変数のサンプリングにはデータ拡大法としてシミュレーションスムーザを、条件付事後分布 $p(\boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ からのサンプリングにはギブスサンプリングを、条件付事後分布 $p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{X}^T)$ からのサンプリングではMHアルゴリズムを、それぞれ使う。このようにパラメータに応じて異なるアルゴリズムを採用するのが複合MCMC法である。

観測誤差を導入した状態空間モデルにおける複合MCMC法は次のような5つのステップとして示される。

ステップ1. パラメータの初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ および $\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}$ を特定化し、繰り返し計算の計算回数のインデックスを $g = 1$ とセットする。

ステップ2. 構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(g-1)}$ の下で Sims (2002) の方法を利用してDSGEモデルの合理的期待均衡を計算し、 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$, $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$ および $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$ を得る。

ステップ3. $\boldsymbol{\Gamma}^{(g)}$ を $p(\boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}^{(g-1)}, \mathbf{X}^T)$ からサンプリングする。

(3.1): 未知の状態変数 $\mathbf{S}_t^{(g)}$ を, de Jong and Shephard (1995) および Durbin and Koopman (2002) によるシミュレーションスムーザを利用して $p(\mathbf{S}^T | \boldsymbol{\Gamma}^{(g-1)}, \boldsymbol{\theta}^{(g-1)}, \mathbf{X}^T)$ からサンプリングする。(詳細は3.3節で説明する。)

(3.2): サンプリングされた状態変数 $\mathbf{S}^{T(g)}$ を使って, $p(\boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{S}^{T(g)}, \boldsymbol{\theta}^{(g-1)}, \mathbf{X}^T)$ から観測方程式のパラメータ $\boldsymbol{\Gamma}^{(g)}$ をサンプリングする。(詳細は3.4節で説明する。)

ステップ4. $p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\Gamma}^{(g)}, \mathbf{X}^T)$ から、構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(g)}$ を以下のMHアルゴリズムでサンプリングする¹⁰⁾。

¹⁰⁾ ステップ4における構造パラメータのMHアルゴリズムとして、従来のDSGEモデルの推定で利用されるMHアルゴリズムに則った手法を採用する。

(4.1): 提案密度 $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$ からサンプリングされた構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ を使って、採択確率 q を以下のように計算する¹¹⁾.

$$q = \min \left[\frac{p(\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}|\boldsymbol{\Gamma}^{(g)}, \mathbf{X}^T)p(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)}|\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})})}{p(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)}|\boldsymbol{\Gamma}^{(g)}, \mathbf{X}^T)p(\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}|\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})}, 1 \right].$$

(4.2): 提案された構造パラメータ $\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ を確率 q で採択、確率 $1 - q$ で棄却する。採択された場合、 $\boldsymbol{\theta}^{(g)} = \boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ とし、棄却された場合、 $\boldsymbol{\theta}^{(g)} = \boldsymbol{\theta}^{(g-1)}$ とセットする。

ステップ 5. 繰り返し計算のインデックスを $g = g + 1$ とセットし、ステップ 2 に戻る。この手続きを $g = G$ まで繰り返す。なお、 G は繰り返し計算の計算回数をあらわす¹²⁾。

ステップ 3 の詳細な計算方法については、3.3 節および 3.4 節で述べることにする。ここではステップ 1 と 4 におけるアルゴリズムについて、それぞれ補足することとする。

まず、ステップ 1 の初期値に設定方法であるが、一般に、MCMC アルゴリズムは任意の初期値でもいずれは収束することは知られている。しかし、パラメータの数が相当数にのぼる場合にはその収束には相当の計算回数が必要されることが予想される。そこで本稿では効率的なサンプルを行うために、先行研究に倣い、次のように初期値を設定した。構造パラメータの初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ の設定について、まず観測誤差を考慮しない通常の DSGE モデルの構造パラメータの事後密度のモードを数値計算でもとめ、これを初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ として設定する。次に $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ の下でシミュレーションスムーズにより平滑化した状態変数を初期値 $\mathbf{S}_t^{(0)}$ とする。最後に $\mathbf{S}_t^{(0)}$ と \mathbf{X}^T を使って観測方程式のパラメータの初期値 $\boldsymbol{\Gamma}^{(0)}$ を計算することとする。

次に、ステップ 4 の (4.1) における提案密度からのパラメータの発生法については、本稿では先行研究にしたがいランダムウォーク MH アルゴリズムを採用した。提案関数 $\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ は以下の式となる。

$$\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})} = \boldsymbol{\theta}^{(g-1)} + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, c\boldsymbol{\Sigma}),$$

ここで、 $\boldsymbol{\Sigma}$ はランダムウォーク過程の分散共分散行列、 c はその調整係数である。 $\boldsymbol{\Sigma}$ として、初期値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ を得るときに計算された対数事後分布 ($l(\boldsymbol{\theta}) = \ln p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{X}^T)$) のヘシアン

11) なお、提案分布からサンプリングした構造パラメータによる合理的期待均衡解が非決定となった場合、そのパラメータは採用されず、合理的期待均衡が一意に決定するパラメータがサンプリングされるまで提案密度からサンプリングを繰り返すものとする。

12) 計算回数 G はパラメータの収束診断の統計量を参照して決める。ここでは Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量を利用した。

$(-l''^{-1}(\hat{\theta}))$ を設定した。さらに、ランダムウォーク MH でサンプリングする場合、

$$p(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)}|\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}) = p(\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}|\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$$

が成立するため、採択確率 q は以下の式に帰着する。

$$q = \min \left[\frac{f(\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})})}{f(\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})}, 1 \right],$$

この式が示すように、採択確率は提案密度 $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(g-1)})$ に依存しない。その結果、事後密度と近似した形状をもつ提案密度を選択する必要がなくなる点がランダムウォーク MH の利点である。しかしながら、サンプルの候補となる値 $\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ は前回のサンプル $\boldsymbol{\theta}^{(g-1)}$ の値に対してそれほど乖離しないようにすべきである。これは両者の乖離が大きい場合には採択確率 q が小さくなり MCMC の効率性が落ちるからである。 q の低下を防止するためには調整係数 c の値を小さくとればよいのであるが、 c が小さすぎると $\boldsymbol{\theta}^{(\text{proposal})}$ のサンプリングの範囲が狭量になってしまう。Roberts *et al.* (1997) および Neal and Roberts (2008) はランダムウォーク MH における最適な採択確率 (optimal acceptance rate) q は約 25% であることを報告している¹³⁾。したがって本稿においては、採択確率が 25% の近い値になるように調整係数 c を設定している。

3.3 シミュレーションスムーザによる状態変数と構造ショックの推定法

3.2 節のステップ 3 の (3.1) で述べた状態変数の条件付事後分布 $p(\boldsymbol{S}^T|\boldsymbol{\Gamma}^{(g-1)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}^T)$ によるサンプリングは de Jong and Shephard (1995) が提案したシミュレーションスムーザを採用する¹⁴⁾。1 節でも述べたが、Boivin and Giannoni (2006), Kryshko (2010) は、状態変数の平滑法として Carter and Kohn (1994) の手法を採用している。しかし Carter and Kohn (1994) は、Chib (2001, p. 3614) でも指摘があるように、状態変数の分散共分散行列のサンプリング中に非正定値行列が発生することでサンプリングが中断してしまうという問題が生じる。そのため、先行研究ではアドホックに状態変数の分散共分散行列を設定し推定を行っている。他方で、本稿が採用するシミュレーションスムーザではこのような

¹³⁾ ここでいう最適な採択確率とは、目標とする不変分布への収束速度を最大化する採択確率のことである。Roberts *et al.* (1997) は、ランダムウォーク MH においてパラメータ同士の確率密度が i.i.d. であるという厳しい仮定の下でパラメータの次元 d が $d \rightarrow \infty$ では最適採択確率が 0.234 であることを解析的に導いた。また、Neal and Roberts (2008) は彼らの仮定にパラメータの密度関数を原点から等距離で切断する制約を付加しても最適採択確率が 0.234 であることを報告している。Rosenthal (2011) によれば、 $d \geq 5$ であるならば、この最適採択確率の値 (0.234) はよく適合するようであり、また、採択確率が 0.1 から 0.6 までの間である限りは比較的効率的であることも判明している。しかしながら、本稿の採用するアルゴリズムは複合 MH (Metropolis within Gibbs) であるので、彼らの研究成果をそのまま適用できない点には留意すべきである。著者の知る限り、複合 MH に関する研究報告は現段階では皆無である。最適採択率に関する詳細なサーベイは Rosenthal (2011) にある。

問題が発生しないので、本稿の推定法は、観測誤差をもつ DSGE モデルに対するより汎用的な推定法であるといえることができる。

以下に示すアルゴリズムのステップを簡易に表現するために、3.1 節の (3.4), (3.5) の状態空間モデルを次の (3.7), (3.8) として書き直そう。

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{S}}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad \boldsymbol{\nu}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}), \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_t = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{S}}_{t-1} + \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.8)$$

シミュレーションスムーザを行うために、まずカルマンフィルタが行われる。この状態空間モデルのカルマンフィルタは以下の式から構成される。

$$\boldsymbol{\eta}_t = \tilde{\mathbf{X}}_t - \tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{S}}_{t|t}, \quad \mathbf{F}_t = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{P}}_{t|t}\tilde{\mathbf{\Lambda}}' + \mathbf{R}, \quad \mathbf{K}_t = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{P}}_{t|t}\tilde{\mathbf{\Lambda}}'\mathbf{F}_t^{-1},$$

$$\mathbf{L}_t = \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{K}_t\tilde{\mathbf{\Lambda}}, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{t+1|t+1} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{S}}_{t|t} + \mathbf{K}_t\boldsymbol{\eta}_t, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{t+1|t+1} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{P}}_{t|t}\mathbf{L}_t' + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{H}}'$$

ここで $\boldsymbol{\eta}_t$ は予測誤差、 \mathbf{K}_t はカルマンゲイン、 $\tilde{\mathbf{P}}_t$ は状態変数 $\tilde{\mathbf{S}}_t$ の共分散行列である。これら $\tilde{\mathbf{S}}_{t|t}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{t|t}$ のフィルタリングは $t = 1, 2, \dots, T$ に対して前向きに順次おこなわれる。また、初期値 $\tilde{\mathbf{S}}_{1|1}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{1|1}$ は $\tilde{\mathbf{X}}_1 = \tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{S}}_{1|1}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{1|1} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{P}}_{1|1}\tilde{\mathbf{G}}' + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{H}}'$ を解いた値が与えられる¹⁵⁾。ただし $\mathbf{S}_{t|t}$ の添え字 $t|t$ は期間 t までの \mathbf{X}_t による条件付き期待値 $E(\mathbf{S}_t | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_t)$ を表す。

次に、シミュレーションスムーザは、カルマンフィルタによって得た値を使って以下の式 (3.9), (3.10) から $t = T, \dots, 2, 1$ に対して後ろ向きに順次行い、 \mathbf{r}_{t-1} , \mathbf{N}_{t-1} が算出される。

$$\mathbf{r}_{t-1} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}'\mathbf{F}_t^{-1}\boldsymbol{\eta}_t - \mathbf{W}_t'\mathbf{C}_t^{-1}\mathbf{d}_t + \mathbf{L}_t'\mathbf{r}_t, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{N}_{t-1} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}'\mathbf{F}_t^{-1}\tilde{\mathbf{\Lambda}} + \mathbf{W}_t'\mathbf{C}_t^{-1}\mathbf{W}_t + \mathbf{L}_t'\mathbf{N}_t\mathbf{L}_t, \quad (3.10)$$

ここで \mathbf{W}_t および \mathbf{C}_t は以下の式から算出される。

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{H}}'\mathbf{N}_t\mathbf{L}_t,$$

¹⁴⁾ シミュレーションスムーザの手法として、ほかに Durbin and Koopman (2002) がある。Durbin and Koopman (2002) の利点は、スムージングのアルゴリズムにおいて Carter and Kohn (1994) や de Jong and Shephard (1995) のような新規のアルゴリズムの採用が不要で、従来から知られているカルマンスムーザを適用できる点である。ただし、(3.7) と (3.8) の $\boldsymbol{\nu}_t$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ をサンプリングするために、実際のデータ \mathbf{X} と人工データ \mathbf{X}^+ のそれぞれに対してカルマンフィルタとスムーザを行うため、1 サンプルに対して計 2 回のフィルタリングとスムージングの処理が必要となる。本稿の DSGE モデルは中規模モデルであり、この MCMC に要する処理時間の観点から Durbin and Koopman (2002) の採用を控え、代わりに de Jong and Shephard (1995) を採用することとした。ただし、Durbin and Koopman (2002, p. 607) にはフィルタリングとスムージングの処理を 1 回にまとめるアルゴリズムも示唆されている。Durbin and Koopman (2002) によるこの効率化アルゴリズムの処理時間を確認したところ、それでもなお de Jong and Shephard (1995) の手法のほうが高速であった。

¹⁵⁾ discrete Lyapunov equation (あるいは Sylvester equation) の形式である $\tilde{\mathbf{P}}_{1|1} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{P}}_{1|1}\tilde{\mathbf{G}}' + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{H}}'$ から初期値 $\tilde{\mathbf{P}}_{1|1}$ を求める数値的な解法については Anderson and Moore (1979) の 6 節や Anderson *et al.* (1996) を参照のこと。

$$C_t = Q(\theta) - Q(\theta)\tilde{H}'N_t\tilde{H}Q(\theta),$$

また確率変数 d_t は $N(\mathbf{0}, C_t)$ からサンプリングされる。初期値として $r_T = 0$, $N_T = 0$ が設定される。

構造ショックの推定値 $\hat{\varepsilon}_{t|T}$ のスムージングは、これらの値を使い次式によって後ろ向きに算出される。ただし $\hat{\varepsilon}_{t|T}$ の添え字 $t|T$ は全期間 T までの \mathbf{X}_T による条件付き期待値 $E(\varepsilon_t | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_T)$ を表す。

$$\hat{\varepsilon}_{t|T} = Q(\theta)\tilde{H}'r_t + d_t, \quad d_t \sim N(\mathbf{0}, C_t), \quad t = T, \dots, 2, 1$$

ここで発生させた構造ショック $\hat{\varepsilon}_t$ は状態変数の推定だけでなく、5節で説明する歴史分解 (Historical Decomposition) にも利用される¹⁶⁾。また、シミュレーションスムーザによる状態変数の推定値は、次のように前向きに算出される。

$$\tilde{S}_{t+1|T} = \tilde{G}\tilde{S}_{t|T} + H\hat{\varepsilon}_{t|T}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.11)$$

ただし初期値は $\tilde{S}_{1|T} = \tilde{S}_{1|1} + \tilde{P}_{1|1}r_0$ により与えられる。(3.11) 式の $\tilde{S}_{t|T}$ ($t = 1, 2, \dots, T$) が、状態変数の条件付事後分布 $p(\mathbf{S}^T | \Gamma^{(g-1)}, \theta, \mathbf{X}^T)$ からのサンプリングとなる。

3.4 観測方程式のパラメータの推定法

3.2節のステップ3の(3.2)で述べた条件付事後分布 $p(\Gamma | \mathbf{S}^{T(g)}, \theta^{(g-1)}, \mathbf{X}^T)$ からの観測方程式のパラメータ $\Gamma = \{\mathbf{R}, \Psi\}$ のサンプリングは Chib and Greenberg (1994) が提案した AR(1) の攪乱項をもつ回帰モデルの推定法を援用する。

\mathbf{R} , Ψ のそれぞれを対角化行列と仮定しているため、モデルの状態変数 \mathbf{S}^T を所与とすれば、 k 本目の観測方程式から観測誤差は $e_{k,t} = X_{k,t} - \mathbf{A}_k \mathbf{S}_t$ と計算できる。ここで、 \mathbf{A}_k は $1 \times J$ ベクトルであり、行列 \mathbf{A} の k 行目である。また、観測誤差は $e_{k,t} = \Psi_{kk}e_{k,t-1} + \nu_{k,t}$, $\nu_{k,t} \sim \text{i.i.d. } N(0, R_{kk})$ の AR(1) 過程にしたがう。ここで R_{kk} および Ψ_{kk} は、それぞれ \mathbf{R} および Ψ の第 k 対角成分である。したがって、 $k = 1, \dots, N$ の各観測方程式において、観測誤差のパラメータ Γ のサンプリングは、 R_{kk}, Ψ_{kk} 単位で独立に行うことができる。この2つのパラメータ R_{kk}, Ψ_{kk} の事後分布のサンプリングは、以下に示す2つのステップを使って、条件付事後分布 $p(R_{kk} | \Psi_{kk}, \mathbf{S}^T, \theta, \mathbf{X}^T)$, $p(\Psi_{kk} | R_{kk}, \mathbf{S}^T, \theta, \mathbf{X}^T)$ から交互にギブスサンプリングを採用しておこなう。以下では表現の簡便化を図るため、観測方程式の k 本目の方程式に焦点を当てて考察する。

¹⁶⁾ 歴史分解は次のように手順でなされる。推定した構造ショックベクトル $\hat{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Mt})$ のうち特定のショックの要素 ε_{it} , 以外の要素を0とおいて $(0, 0, \dots, \varepsilon_{it}, \dots, 0)$ とする。これを(3.11)式の $\hat{\varepsilon}_t$ に代入することで、特定ショックによる状態変数への影響が導出される。これが歴史分解である。

まず、各 (R_{kk}, Ψ_{kk}) に対して、次のような正規-逆ガンマ分布となる共役事前分布を設定する。

$$\begin{aligned} p(R_{kk}, \Psi_{kk}) &= p(R_{kk}) p(\Psi_{kk}) \\ &= IG(R_{kk}|s_0, \nu_0) \times N(\Psi_{kk}|\Psi_0, \sigma_{\Psi_0}^2) \mathbf{1}_{\{|\Psi_{kk}| < 1\}} \end{aligned}$$

ここで IG は逆ガンマ分布を示し、 $\mathbf{1}$ は $\{\cdot\}$ の内が真ならば 1、偽ならば 0 となる指標関数である。事前分布のパラメータは、Kryshko (2010) にしたがって、 $s_0 = 0.001$ 、 $\nu_0 = 3$ 、 $\Psi_0 = 0$ 、 $\sigma_{\Psi_0}^2 = 1$ と設定する。

ステップ 1. 条件付事後分布： $p(R_{kk}|\Psi_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ から R_{kk} のサンプリング

R_{kk} の条件付事後分布が、逆ガンマ分布に比例し

$$\begin{aligned} p(R_{kk}|\Psi_{kk}, \mathbf{S}^T, \mathbf{X}^T) &\propto p(\mathbf{X}^T|\mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta}) p(R_{kk}) \\ &\propto (R_{kk})^{-(\nu_0+T)/2-1} \exp\left(-\frac{s_0 + \boldsymbol{\nu}'_k \boldsymbol{\nu}_k}{2R_{kk}}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

と書くことができることを以下に示そう。(3.13) 式の右辺にある事前分布 $p(R_{kk})$ は逆ガンマ分布として特定化しているので、

$$\begin{aligned} p(R_{kk}) &= \frac{(s_0/2)^{\nu_0/2}}{\Gamma(\nu_0/2)} (R_{kk})^{-\nu_0/2-1} \exp\left(-\frac{s_0}{2R_{kk}}\right) \\ &\propto (R_{kk})^{-\nu_0/2-1} \exp\left(-\frac{s_0}{2R_{kk}}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで ν_0 と s_0 は事前分布のパラメータである。次に、(3.13) 式の右辺の条件付尤度関数 $p(\mathbf{X}^T|\mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta})$ をもとめよう。まず、

$$X_{k,t}^* = X_{k,t} - \Psi_{kk} X_{k,t-1}, \quad \mathbf{S}_t^* = \mathbf{S}_t - \Psi_{kk} \mathbf{S}_{t-1}$$

とおき、 \mathbf{X}_k^* を $T \times 1$ ベクトルである $\mathbf{X}_k^* = [X_{k,1}^*, \dots, X_{k,T}^*]'$ とし、 \mathbf{S}^* を $T \times J$ 行列である $\mathbf{S}^* = [\mathbf{S}_1^{*'}, \dots, \mathbf{S}_T^{*'}]'$ とする。3.1 節で述べたように $\boldsymbol{\Lambda}_k$ が既知であり、 \mathbf{X}_k^* 、 \mathbf{S}^* が所与であるので、観測誤差の iid ショック $\boldsymbol{\nu}_k$ は以下のように導出できる。

$$\mathbf{X}_k^* = \mathbf{S}^* \boldsymbol{\Lambda}'_k + \boldsymbol{\nu}_k \iff \boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{X}_k^* - \mathbf{S}^* \boldsymbol{\Lambda}'_k.$$

したがって、条件付尤度関数 $p(\mathbf{X}^T|\mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta})$ は、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}^T|\mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R_{kk}}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2R_{kk}} \sum_{t=1}^T (X_{k,t}^* - \mathbf{S}_t^{*'} \boldsymbol{\Lambda}'_k)^2\right\} \\ &\propto (R_{kk})^{-T/2} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\nu}'_k \boldsymbol{\nu}_k}{2R_{kk}}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\nu}'_k \boldsymbol{\nu}_k = \sum_{t=1}^T (X_{k,t}^* - \mathbf{S}_t^* \boldsymbol{\Lambda}'_k)^2$ である。

以上により、 R_{kk} の条件付事後分布が逆ガンマ分布に比例することがわかった。したがって、次のような逆ガンマ分布である R_{kk} の条件付事後分布から、観測誤差の分散 R_{kk} をサンプリングできる。

$$R_{kk} | \Psi_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T \sim IG(\bar{s}, \bar{\nu}), \quad (3.13)$$

$$\text{ただし } \bar{s} = s_0 + \boldsymbol{\nu}'_k \boldsymbol{\nu}_k, \bar{\nu} = \nu_0 + T.$$

ステップ2. 条件付事後分布: $p(\Psi_{kk} | R_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T)$ から Ψ_{kk} のサンプリング

Ψ_{kk} の条件付事後分布は、

$$p(\Psi_{kk} | R_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T) \propto p(\mathbf{X}_k^T | \mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta}) p(\Psi_{kk}),$$

と書くことができるが、この式の右辺の尤度関数 $p(\mathbf{X}_k^T | \mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta})$ における観測誤差 $e_{k,t}$ は、

$$e_{k,t} = X_{k,t} - \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{S}_t,$$

となり、いま $\mathbf{e}_k = [e_{k,2}, \dots, e_{k,t}]'$, $\mathbf{e}_{k,-1} = [e_{k,1}, \dots, e_{k,t-1}]'$ とおくと、

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k,-1} \Psi_{kk} + \boldsymbol{\nu}_k,$$

と書くことができる。このとき尤度関数は、 $\hat{\Psi}_{kk} = (\mathbf{e}'_{k,-1} \mathbf{e}_{k,-1})^{-1} \mathbf{e}'_{k,-1} \mathbf{e}_k$ を利用すると、

$$p(\mathbf{X}_k^T | \mathbf{S}^T, R_{kk}, \Psi_{kk}, \boldsymbol{\theta}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2R_{kk}} (\Psi_{kk} - \hat{\Psi}_{kk})' \mathbf{e}'_{k,-1} \mathbf{e}_{k,-1} (\Psi_{kk} - \hat{\Psi}_{kk}) \right],$$

となる。 Ψ_{kk} の事前分布は、 Ψ_0 の平均、 $\sigma_{\Psi,0}^2$ の分散をもつ切断された正規分布であり、

$$p(\Psi_{kk}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_{\Psi,0}^2} (\Psi_{kk} - \Psi_0)^2 \right] \times \mathbf{1}_{|\Psi_{kk}| < 1},$$

と示せるので、条件付事後分布は、

$$\begin{aligned} p(\Psi_{kk} | R_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T) &\propto \exp \left[-\frac{1}{2R_{kk}} (\Psi_{kk} - \hat{\Psi}_{kk})' \mathbf{e}'_{k,-1} \mathbf{e}_{k,-1} (\Psi_{kk} - \hat{\Psi}_{kk}) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_{\Psi,0}^2} (\Psi_{kk} - \Psi_0)^2 \right] \times \mathbf{1}_{|\Psi_{kk}| < 1}, \end{aligned}$$

である。すなわち、 Ψ_{kk} の条件付事後密度は2つの正規分布の密度関数の積に比例することがわかる。したがって、観測誤差の係数パラメータ Ψ_{kk} は以下の切断された正規分布か

らサンプリングを行う¹⁷⁾.

$$\Psi_{kk} | R_{kk}, \mathbf{S}^T, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^T \sim N(\bar{\Psi}_{kk}, \bar{V}_{\Psi_{kk}}) \times \mathbf{1}_{\{|\Psi_{kk}| < 1\}}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \bar{V}_{\Psi_{kk}} &= [(R_{kk}(\mathbf{e}'_{k,-1}\mathbf{e}_{k,-1})^{-1})^{-1} + (\sigma_{\Psi,0}^2)^{-1}]^{-1}, \\ \bar{\Psi}_{kk} &= \bar{V}_{kk} \left[(R_{kk}(\mathbf{e}'_{k,-1}\mathbf{e}_{k,-1})^{-1})^{-1} \hat{\Psi}_{kk} + (\sigma_{\Psi,0}^2)^{-1} \Psi_0 \right]. \end{aligned}$$

4. パラメータの設定とデータ

4.1 観測変数と観測誤差

推定にあたっては、観測変数 \mathbf{X}_t として、Smets and Wouters (2003, 2007) および Christiano *et al.* (2005) と同様に、(1) 産出: y_t , (2) 消費: c_t , (3) 投資: i_t , (4) 労働供給: l_t , (5) 実質賃金: w_t , (6) インフレ率: π_t , (7) 名目利子率: R_t の 7 変数を選択する。これらの 7 つの観測変数は 7 つの状態変数と 1 対 1 対応の関係をもち、従来の DSGE モデルではデータの観測誤差 e_{it} の存在を考慮せずに、観測変数 X_{it} と状態変数 S_{it} は同一のものとしていた ($X_{it} = S_{it}$)。他方で、本稿のモデルではデータの観測誤差の存在を仮定し、観測変数と状態変数の関係を $X_{it} = S_{it} + e_{it}$ とおいている。ただし、観測変数のうち、名目利子率は金融政策を通じて中央銀行が直接コントロールすることが可能であり、観測誤差が発生する要因が無いと思われるため、名目利子率における観測誤差を除くこととし、 $e_t^R = 0$ と設定する。したがって、名目利子率を除いた 6 つの観測変数に観測誤差を導入する。

また、賃金および価格のマークアップショックという 2 つの構造ショック ε_t^w および ε_t^p は、観測誤差と識別することが困難であるため、観測誤差を導入して推定を行う際には、(2.4) 式、(2.8) 式から除外するものとする。したがって、本稿では、Smets and Wouters (2003, 2007) および Christiano *et al.* (2005) のモデルとは違い、賃金やインフレ率といった DSGE モデルの状態変数の変動は、マークアップショックを除く構造ショックの変動および観測誤差に起因するものと仮定する。この点は、従来の DSGE モデルとは異なる点である。本稿と同じくマークアップショックを観測誤差に置き換えたモデルに Justiniano and Primiceri (2008) や Fueki *et al.* (2010) がある。ただし、彼らが MH アルゴリズムを採用しているのに対して、われわれの推定法はシミュレーションスムーザを平滑法としてもつ複合 MCMC 法を採用している点が異なる。

1 節でも述べたように、本稿の動機のひとつは、観測誤差を導入することによる状態変数と構造パラメータの推定値への影響を考察することにあるので、「観測誤差なしのケース」と「観測誤差ありのケース」の 2 つのケースの推定と比較を行う。「観測誤差なしのケース」では、Smets and Wouters (2003, 2007) と同様に観測誤差を付加しない通常の DSGE モデ

¹⁷⁾ なお、 $|\Psi_{kk}| \geq 1$ の Ψ_{kk} をサンプリングした場合、定常条件、 $|\Psi_{kk}| < 1$ を満たすまでサンプリングを繰り返すものとする。

ルを推定する。他方で、「観測誤差ありのケース」では、観測誤差を導入した DSGE モデルを推定する。なお、「観測誤差なしのケース」では構造ショックとして賃金と価格のマークアップショックを含めるのに対し、「観測誤差ありのケース」ではその2つの構造ショックを除いている点に留意されたい。

4.2 パラメータのカリブレーションと事前分布

本モデルにおける景気循環の要因である7つの構造ショックは互いに独立であると仮定する。また、エクイティプレミアムショック ε_t^e と金融政策ショック ε_t^m の2つの構造ショックは i.i.d. ショックであり、選好ショック ε_t^c 、TFP ショック ε_t^z 、投資財固有の生産性ショック ε_t^{inv} 、労働供給ショック ε_t^l 、財政支出ショック ε_t^g といった残りの5つの構造ショックには慣性があるとし、AR (1) 過程にしたがうと仮定する。そこで表1の示すように、AR 項の係数パラメータ ρ の事前分布として、定常条件 $\rho \in (0, 1)$ を満たすようにベータ分布に特定化し、平均 0.85、標準誤差 0.10 という比較的強い事前分布を想定している。また、i.i.d. ショック ε_t の分散は正值であるため、その事前分布は逆ガンマ分布に特定化した。なお、合理的期待均衡が一意に定まらないパラメータの範囲は、事前分布から切断している。

Smets and Wouters (2003, 2007), Levin *et al.* (2005) および Onatski and Williams (2010) と同様に、いくつかの構造パラメータは事前にカリブレートする必要がある。日本のデータを利用した DSGE モデルのベイズ推定の先行研究は Sugo and Ueda (2008) などに限られているため、本稿では上述の日本、米国、欧州に対する先行研究にしたがって、パラメータをカリブレートすることとする。

まず、主観的割引因子 β は 0.99 と設定した。これによって実質利利率の定常値が年率で 4% と想定したことになる。資本減耗率 τ は四半期当たりで 0.025 とし、年率で換算すると 10% の資本減耗を想定することになる。以上の設定から、資本の実質レンタル率の定常値も $\bar{r}^k = \frac{1}{\beta} - (1 - \tau)$ と計算できる。資本分配率 α は 0.30 とし、労働の所得分配率の定常値が 70% であると想定した。財政支出・産出比率の定常値 g_y は 0.1 とし、資本・産出比率 k_y (資本係数) の定常値を 1.5 と設定した。加えて、識別が困難であるため、Onatski and Williams (2010) にしたがって、賃金のマークアップ率のパラメータ λ_w も 0.05 と設定した。

残りの構造パラメータに関しては、表1のように、Smets and Wouters (2003) にしたがって事前分布を特定化した。事前分布の平均は、主として Smets and Wouters (2003) にしたがって設定しており、その標準誤差はパラメータの値がリーズナブルな範囲をカバーするように設定している。例えば、価格と賃金のカルボパラメータ ξ_p と ξ_w の平均は価格および賃金の平均契約期間が1年であるという Galí *et al.* (2001) の推定結果に概ね沿うように 0.75 に設定し、一方でその標準偏差は、契約期間が3四半期から2年まで変動しうるように 0.15 に設定している。同様に、消費の異時点間の代替弾力性 σ_c の平均は 1 と設定

した。資本稼働率の費用関数の弾力性 ψ の平均は 0.2 とし、King and Rebelo (1999) が報告している値である 0.1 まで変動しうる標準偏差を設定している。生産の固定費用のシェア ϕ の平均は 1.45 とし、これは Christiano *et al.* (2005) に近い値に設定している。労働供給の賃金弾力性 σ_L の平均は 2 と設定しているが、マイクロデータに基づく研究で報告されている低い弾力性値から DSGE モデルの推定結果で報告されている比較的高い値まで広い範囲の値を取りうる標準偏差を設定している。最後に、金融政策のパラメータの平均については、合理的期待均衡の一意性を保証すべく、インフレ率にかかるパラメータ μ_π を 1.7、利子率平準化のパラメータ ρ_m の平均として 0.8、GDP ギャップにかかる係数 μ_y として 0.125 と設定した。

4.3 データ

推定には日本のマクロ経済の四半期データを利用するが、本稿の推定期間は Sugo and Ueda (2008) に倣い、第 2 次石油ショックとゼロ金利政策の期間を除く 1981:Q1 から 1995:Q4 の 15 年間である。この期間に限定した理由は、金融政策のテイラールールおよび DSGE モデルが線形モデルであることに拠る。

7つの観測変数 X_t に該当するデータとして、(1) 産出 y_t として一人当たりの実質 GDP (単位は 100 万円、基準年は 1990 年、季節調整済み)、(2) 消費 c_t として名目民間最終消費支出を GDP デフレーターと労働人口で除した一人当たりの実質消費 (単位その他は GDP と同様)、(3) 投資 i_t として名目民間企業設備投資を GDP デフレーターと労働人口で除した一人当たりの実質投資 (単位その他は GDP と同様)、(4) 労働供給量 l_t として労働時間指数と総雇用量の積を労働人口で除した系列、(5) 実質賃金 w_t として名目賃金指数を GDP デフレーターで除した実質賃金指数、(6) インフレ率 π_t として GDP デフレーターの変化率の年率換算値、(7) 名目利子率 R_t として無担保コールレートを利用し年率換算したもの、を採用する。他方で、資本ストック K_t や資本財のシャドウプライス q_t は、Smets and Wouters (2003) と同様、観測不可能な状態変数とした。

産出 y_t 、消費 c_t 、投資 i_t 、労働供給 l_t 、実質賃金 w_t の 5 つの実質系列のトレンド除去の方法は、自然対数化した後、Hodrick-Prescott フィルタでトレンドを除去する。さらに、この系列を 100 倍することで定常値からの乖離を % 表示に変換した系列として利用する。他方で、名目利子率 R_t とインフレ率 π_t の 2 系列は % 表示である値から Hodrick-Prescott フィルタでトレンドを除去する¹⁸⁾。そして推定に際しては、全てのデータを demean したものを利用した。これらのデータ処理した値は観測変数 X_t として図 1 の実線として示されている。

表1 パラメータの事前分布.

パラメータ	意味	分布	平均	標準偏差
構造 パラメータ				
h	習慣形成	ベータ分布	0.700	0.100
σ_c	異時点間消費の代替弾力性の逆数	正規分布	1.000	0.375
σ_L	労働供給の賃金弾力性	正規分布	2.000	0.750
$1/\varphi$	投資調整費用	正規分布	4.000	1.500
ϕ	生産の固定費用	正規分布	1.450	0.250
ψ	資本稼働率の費用	正規分布	0.200	0.075
γ_p	価格のインデクセーション	ベータ分布	0.750	0.150
γ_w	賃金のインデクセーション	ベータ分布	0.750	0.150
ξ_p	価格のカルボパラメータ	ベータ分布	0.750	0.150
ξ_w	賃金のカルボパラメータ	ベータ分布	0.750	0.150
政策 パラメータ				
ρ_m	利子率平滑化	ベータ分布	0.800	0.100
μ_π	利子率のテイラーパラメータ	正規分布	1.700	0.100
μ_y	産出ギャップのテイラーパラメータ	正規分布	0.125	0.050
ショックの 慣性				
ρ_z	TFP ショック	ベータ分布	0.850	0.100
ρ_c	選好ショック	ベータ分布	0.850	0.100
ρ_g	財政支出ショック	ベータ分布	0.850	0.100
ρ_L	労働供給ショック	ベータ分布	0.850	0.100
ρ_{inv}	投資財固有の生産性ショック	ベータ分布	0.850	0.100
ショックの 標準偏差				
ε_c	選好ショック	逆ガンマ分布	0.200	2.000
ε_{inv}	投資財固有の生産性ショック	逆ガンマ分布	0.100	2.000
ε_q	エクイティプレミアムショック	逆ガンマ分布	0.400	2.000
ε_z	TFP ショック	逆ガンマ分布	0.400	2.000
ε_p	価格のマークアップショック	逆ガンマ分布	0.150	2.000
ε_L	労働供給ショック	逆ガンマ分布	1.000	2.000
ε_w	賃金のマークアップショック	逆ガンマ分布	0.250	2.000
ε_g	財政支出ショック	逆ガンマ分布	0.300	2.000
ε_m	金融政策ショック	逆ガンマ分布	0.100	2.000

注) Smets and Wouters (2003) にしたがって事前分布を設定している。ただし, Smets and Wouters (2003) では ξ_p と ξ_w の標準偏差を 0.05 としている。なお, 合理的期待均衡が一意に定まらないパラメータの範囲は事前分布から切断している。

5. 推定結果

本節では、本稿において提案した複合 MCMC 法による DSGE モデルの推定結果を報告するとともに、その推定結果を従来の DSGE モデルの推定結果と比較する。具体的には、観測誤差が無いケース（MH アルゴリズムを用いて推定）と観測誤差が有るケース（複合 MCMC 法を用いて推定）の 2 つのケースでモデルを推定し、パラメータの推定結果、平滑化した状態変数、インフレ率と実質賃金の歴史分解、モデル選択の結果について報告する。

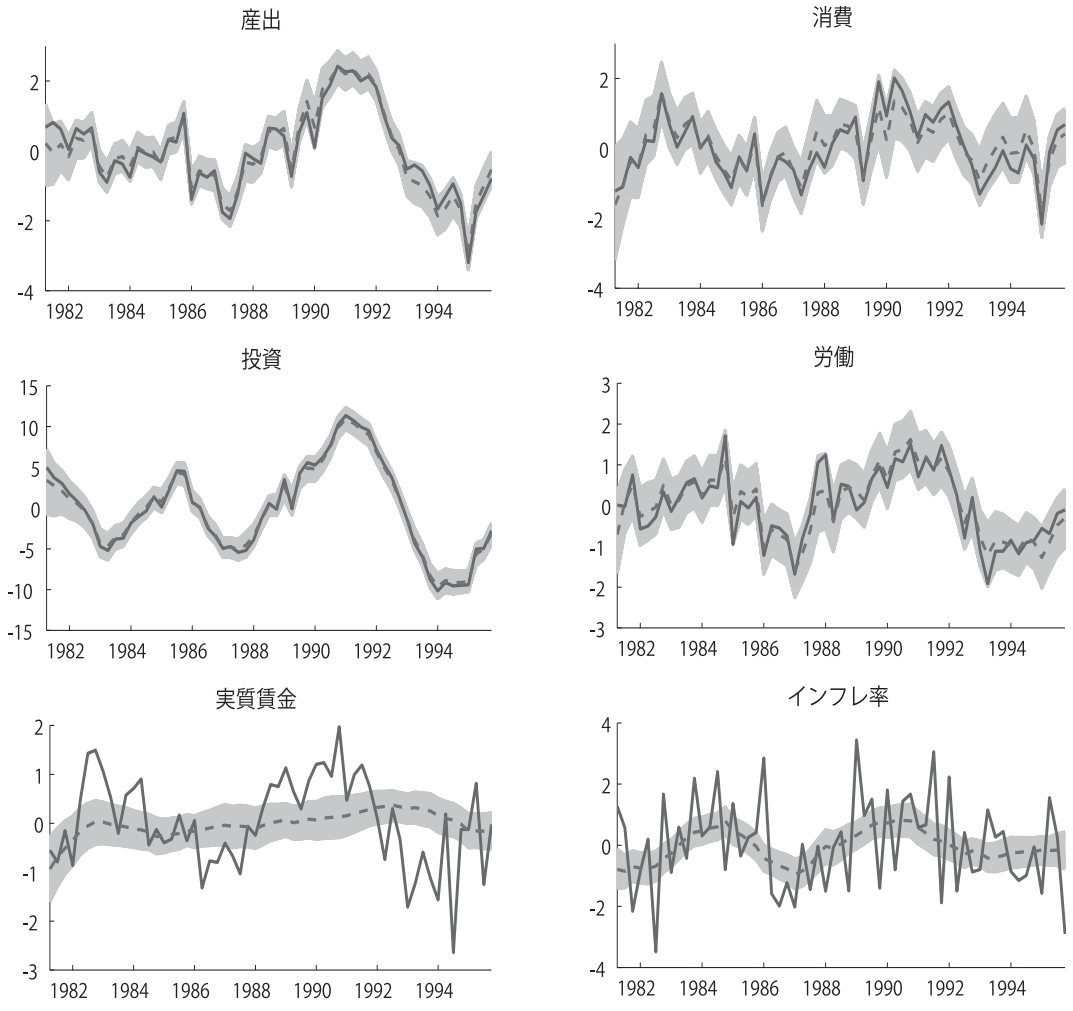
なお、パラメータおよび状態変数、歴史分解等の事後分布の推定にあたっては、MH アルゴリズムおよび複合 MCMC 法両方において 300,000 回の計算を行い、このうち最初の 100,000 回を burn-in として標本を捨て、burn-in 以降の 200,000 回から事後分布の統計量を作成した。統計量として標本平均、標本の標準偏差、標本の 90% 信用区間、さらに標本平均の標準誤差を計算した。

5.1 構造パラメータの推定結果

まず、観測誤差が有るケースと無いケースにおける構造パラメータの事後分布の平均、標準誤差、標準偏差、ならびに 90% 信用区間の推定結果について報告する。表 2 において報告されている通り、観測誤差が無いケースと有るケースの間で事後分布の推定結果に違いが見られる。特に価格のインデクセーション (γ_p)、賃金のインデクセーション (γ_w) ならびにカルボパラメータ (ξ_w) などの事後平均は、観測誤差が有るケースのそれが無いケースにおける事後分布の 90% 信用区間の外にあり、パラメータの事後分布に明白な差異が認められる。価格や賃金のインデクセーションならびに賃金のカルボパラメータについては、価格や賃金データの短期的にボラタイルな変動をマークアップショックという構造ショックとして捉えるか、あるいは観測誤差として捉えるかの差が両ケースにおける推定結果に顕著な影響を及ぼしたものと考えられる。一方で、比較的安定的な変動を示す産出、消費、投資、ならびに労働のデータは、観測誤差の影響が軽微であったため、これらのデータに係る構造パラメータ ($h, \sigma_c, \sigma_L, 1/\varphi, \phi, \psi$) については、両ケースの間で事後分布の推定結果に大きな違いが発生しなかったものと思われる。

また、パラメータの推定結果に差異を生じさせるもう一つの可能性として、林 (1986) に

18) 米国経済を対象としてベイズ推定を行った Del Negro *et al.* (2007) では、産出、消費、投資、実質賃金、資本が技術進歩に伴う共通の確率的トレンドを有し、均斉成長理論と整合的な形で技術進歩率の平均値とモデルの構造パラメータを同時に推定している。本稿のように産出、消費、投資にそれぞれ独立に Hodrick-Prescott フィルタでトレンド除去を行った場合、トレンド成分が共通であるとは限らず、その意味では均斉成長理論から乖離することとなり、望ましいトレンド除去の方法とは言い難い。しかしながら、日本経済を対象としてモデルを推定する場合、90 年代前半とそれ以降でトレンドの変化、すなわち構造変化が生じていることが渡部 (2009) および飯星 (2011) によって報告されており、技術進歩率の平均値が推定期間において一定であるとの仮定に基づいた Del Negro *et al.* (2007) あるいは Smets and Wouters (2007) の手法をそのまま適用することはできない。本稿では構造変化を伴うトレンドの取り扱いには立ち入らず、Hodrick-Prescott フィルタで時変のトレンド成分を除去することで各データのサイクル成分を抽出することとした。



注) 観測誤差ありのケース。破線は平滑化した状態変数の平均 (バンドは 90%信用区間), 太線は対応する観測変数を表す。

図 1 平滑化した状態変数と観測変数。

よって指摘された、観測誤差に起因する推定バイアスが挙げられる。観測誤差が現に存在するケースにおいて、その存在を無視してモデルの構造パラメータを推定した場合、推定値にバイアスが生じることを林 (1986) は指摘している。林 (1986) の指摘はベイズ統計学の枠組みにおける指摘ではないものの、本稿において観測誤差が有るケースと無いケースの間でパラメータの事後分布に差異が生じた背景に、このようなバイアスの可能性があることも考慮に入れる必要があるであろう。

5.2 標準誤差・収束判定・非効率因子

本稿では、標本平均 $\bar{\theta}$ の標準誤差 $SE(\bar{\theta})$ の算出に当たり、Kim *et al.* (1998)、藤原・渡部 (2011) に倣い、以下の Parzen window による計算法を採用した。

$$SE(\bar{\theta}) = \sqrt{\frac{\hat{\gamma}(0)}{M} \left[1 + 2 \frac{M}{M-1} \sum_{i=1}^{B_M} K\left(\frac{i}{B_M}\right) \frac{\hat{\gamma}(i)}{\hat{\gamma}(0)} \right]} \quad (5.26)$$

ここで、 M は burn-in 後の標本数、 $\hat{\gamma}(i)$ は i 次の標本共分散、 $K(z)$ は以下に示す Parzen window のカーネルであり、 B_M はバンド幅で $B_M = 0.01M$ と設定する。

$$\hat{\gamma}(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=i+1}^M (\theta^{(k)} - \bar{\theta})(\theta^{(k-i)} - \bar{\theta}),$$

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3, & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-z)^3, & z \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

上述の標本平均の標準誤差を利用し、本稿では MCMC の収束判定として、以下の Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量を採用した。

$$CD = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\{SE(\bar{\theta}_A)\}^2 + \{SE(\bar{\theta}_B)\}^2}} \quad (5.27)$$

ただし、 $\bar{\theta}_A$ は burn-in 以降最初の 10% である 20,000 標本の平均、 $\bar{\theta}_B$ は最後の 50% の 100,000 標本の平均である。 $SE(\bar{\theta}_A)$ 、 $SE(\bar{\theta}_B)$ の計算には、上述の Parzen window による計算法を利用し、それぞれバンド幅を 200, 1,000 として計算した。

CD 統計量は、事後分布に収束しているという帰無仮説が真の下で、漸的に標準正規分布に従う。CD 統計量による収束判定によれば、観測誤差なし、観測誤差ありの両ケース共に、労働供給に関わるパラメータなど幾つかの例外を除き、事後分布に収束しているという帰無仮説が有意水準 5% で受容されている。

また、藤原・渡部 (2011) に倣い、本稿で用いているサンプリング法がランダムサンプリングと比較してどの程度非効率なのかを議論するため、以下の非効率因子 (Inefficient Factor;

表2 パラメータの推定結果 (観測誤差なしケース).

パラメータ	観測誤差なしケース					
	平均	標準誤差	標準偏差	90% 信用区間	CD	非効率因子
構造						
パラメータ						
h	0.544	0.003	0.089	[0.400 0.692]	1.489	251
σ_c	1.498	0.010	0.282	[1.043 1.964]	0.662	255
σ_L	0.572	0.007	0.080	[0.441 0.698]	6.342	1453
$1/\varphi$	5.326	0.047	1.055	[3.562 7.055]	1.360	396
ϕ	1.951	0.006	0.175	[1.664 2.239]	-0.457	211
ψ	0.151	0.002	0.070	[0.033 0.261]	0.337	174
γ_p	0.304	0.005	0.113	[0.123 0.481]	0.594	340
γ_w	0.395	0.004	0.148	[0.156 0.629]	-0.628	132
ξ_p	0.768	0.002	0.034	[0.711 0.824]	-0.098	712
ξ_w	0.355	0.002	0.036	[0.297 0.409]	-5.697	791
政策						
パラメータ						
ρ_m	0.870	0.001	0.022	[0.836 0.907]	2.639	315
μ_π	1.618	0.003	0.103	[1.442 1.779]	1.110	206
μ_y	0.125	0.002	0.050	[0.041 0.206]	-0.109	381
ショックの						
慣性						
ρ_z	0.558	0.003	0.096	[0.400 0.715]	-2.253	219
ρ_c	0.511	0.004	0.112	[0.328 0.696]	-1.405	265
ρ_g	0.841	0.002	0.072	[0.730 0.964]	-1.592	229
ρ_L	0.484	0.011	0.161	[0.230 0.762]	0.806	857
ρ_{inv}	0.677	0.009	0.122	[0.476 0.858]	-1.878	968
ショックの						
標準偏差						
ε_c	3.235	0.027	0.610	[2.245 4.192]	2.772	387
ε_{inv}	2.465	0.034	0.591	[1.499 3.383]	2.700	664
ε_q	5.174	0.263	3.477	[0.182 9.249]	-1.866	1156
ε_z	0.466	0.002	0.046	[0.392 0.538]	-0.212	232
ε_p	6.683	0.154	2.141	[3.610 9.723]	0.368	1044
ε_L	9.600	0.025	0.355	[9.120 10.00]	2.826	1024
ε_w	0.225	0.012	0.168	[0.058 0.421]	1.427	1220
ε_g	1.948	0.007	0.182	[1.655 2.234]	-0.761	271
ε_m	0.131	0.001	0.013	[0.110 0.151]	-3.169	261

注) 観測誤差なしのケースでは MH アルゴリズム, 観測誤差ありのケースでは複合 MCMC 法を用いて 300,000 回サンプリングを行い, 100,000 回を burn-in として捨て, burn-in 以降の 200,000 回のサンプルを使って推定した。平均, 標準偏差はサンプルの標本平均, 標本標準偏差として計算した。90%信用区間は, サンプルを大ききの順で並び替え, 上 5%と下 5%の値として求めた。標本誤差は Kim *et al.* (1998), 藤原・渡部 (2011) に倣い, Parzen Window を用いて (5.26) 式から計算した。CD は burn-in 以降の 200,000 個のサンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量であり, (5.27) 式から計算した。事後分布に収束していれば, CD 統計量は漸近的に正規分布に従う。非効率因子は (5.28) 式で計算され, 標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングと同等とするために, ランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行う必要があるかを表す。なお, 観測誤差ありのケースでは, 価格と賃金のマークアップショックを除いて推定しているため, ε_p と ε_w に関する各統計量は記載していない。

表2 パラメータの推定結果 (観測誤差ありケース).

パラメータ	観測誤差ありケース					
	平均	標準誤差	標準偏差	90% 信用区間	CD	非効率因子
構造						
パラメータ						
h	0.524	0.004	0.096	[0.363 0.679]	0.481	335
σ_c	1.405	0.013	0.308	[0.920 1.927]	-0.139	346
σ_L	0.948	0.005	0.066	[0.848 1.072]	-3.004	1354
$1/\varphi$	4.684	0.057	1.170	[2.664 6.483]	1.112	479
ϕ	1.814	0.008	0.202	[1.478 2.143]	-0.099	308
ψ	0.210	0.003	0.075	[0.084 0.331]	-0.209	249
γ_p	0.817	0.006	0.126	[0.638 0.992]	0.438	428
γ_w	0.678	0.006	0.169	[0.414 0.950]	2.348	278
ξ_p	0.812	0.002	0.042	[0.748 0.884]	3.044	579
ξ_w	0.685	0.003	0.058	[0.589 0.783]	-0.936	522
政策						
パラメータ						
ρ_m	0.730	0.004	0.055	[0.639 0.820]	1.858	1025
μ_π	1.680	0.003	0.099	[1.516 1.842]	0.216	221
μ_y	0.062	0.003	0.055	[-0.031 0.147]	3.957	584
ショックの						
慣性						
ρ_z	0.756	0.008	0.140	[0.557 0.989]	-3.372	660
ρ_c	0.517	0.005	0.118	[0.323 0.714]	-0.517	310
ρ_g	0.831	0.004	0.095	[0.696 0.980]	-0.807	290
ρ_L	0.854	0.004	0.085	[0.731 0.979]	-1.520	344
ρ_{inv}	0.772	0.005	0.088	[0.645 0.916]	-3.057	535
ショックの						
標準偏差						
ε_c	2.481	0.042	0.754	[1.274 3.677]	2.176	634
ε_{inv}	2.490	0.052	0.796	[1.298 3.671]	-1.084	846
ε_q	3.541	0.205	3.003	[0.170 7.855]	-4.649	939
ε_z	0.401	0.003	0.057	[0.304 0.487]	-0.082	391
ε_L	1.033	0.068	0.833	[0.165 2.176]	3.204	1337
ε_g	0.808	0.032	0.463	[0.147 1.483]	-2.146	953
ε_m	0.099	0.001	0.012	[0.078 0.118]	-0.673	390

注) 観測誤差なしのケースでは MH アルゴリズム, 観測誤差ありのケースでは複合 MCMC 法を用いて 300,000 回サンプリングを行い, 100,000 回を burn-in として捨て, burn-in 以降の 200,000 回のサンプルを使って推定した. 平均, 標準偏差はサンプルの標本平均, 標本標準偏差として計算した. 90%信用区間は, サンプルを大きさの順で並び替え, 上 5%と下 5%の値として求めた. 標本誤差は Kim *et al.* (1998), 藤原・渡部 (2011) に倣い, Parzen Window を用いて (5.26) 式から計算した. CD は burn-in 以降の 200,000 個のサンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量であり, (5.27) 式から計算した. 事後分布に収束していれば, CD 統計量は漸近的に正規分布に従う. 非効率因子は (5.28) 式で計算され, 標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングと同等とするために, ランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行う必要があるかを表す. なお, 観測誤差ありのケースでは, 価格と賃金のマークアップショックを除いて推定しているため, ε_p と ε_w に関する各統計量は記載していない.

IF) を各パラメータについて計算した。

$$IF = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\rho}(i) \quad (5.28)$$

ここで $\hat{\rho}(i)$ は、MCMC でサンプリングされた値の i 次の標本自己相関である。MCMC でサンプリングされた値の分散を σ^2 、 i 次の自己相関を $\rho(i)$ とすると、標本平均の分散は $\sigma^2 (1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \rho(i)) / M$ となる。一方、ランダムサンプリングでは自己相関が無いいため、標本平均の分散は σ^2 / M である。両者の比である非効率因子は、ランダムサンプリングに対する MCMC のサンプリングの非効率性を表し、非効率因子の値が高い程、MCMC によるサンプリングの非効率性が高いことを意味する。なお、無限次までの標本自己相関は計算できないので、本稿では、非効率因子の計算に際して Parzen window による計算法を利用した。

非効率因子の値は、両ケース共に総じて高い値を示し、とりわけ、労働供給に関わるパラメータである σ_L および ε_L は、両ケースにおいて非効率因子の値が大きい。この点について、Chib and Ramamurthy (2010) による、ランダムウォーク MH アルゴリズムを用いた Smets and Wouters モデルの推定結果によると、労働供給の賃金弾力性 σ_L のサンプリングに高い自己相関があることが示されており、さらに各パラメータの非効率因子は総じて 2500 を超える値であったことを報告している。一方、名目硬直性を表すカルボパラメータ ξ_p および ξ_w の非効率因子の値に注目すると、観測誤差なしのケースではそれぞれ 712, 791, 観測誤差ありのケースではそれぞれ 579, 522 となり、観測誤差ありのケースが効率的にサンプリングされていることがわかる。

5.3 平滑化した状態変数

次に、観測誤差が有るケースにおける状態変数の平滑化の結果について報告する。なお、観測誤差が無いケースでは、観測変数とモデルの状態変数が確定的に結びついているため、状態変数を平滑化することができない点に注意されたい。

図 1 において、産出、消費、投資、労働、実質賃金、インフレ率の各経済変数を平滑化した結果を示している¹⁹⁾。図 1 から分かるとおおり、産出、消費、投資、ならびに労働においては、観察されたデータと平滑化された状態変数の間にそれほど顕著な差は認められないものの、実質賃金とインフレ率との間では、その差が顕著にあらわれている。つまりこれは、産出、消費、投資、ならびに労働においては、観測誤差の影響が比較的小さく、実質賃金とインフレ率において、観測誤差の影響が比較的大きいことを意味している。

Smets and Wouters (2003, 2007) や Sugo and Ueda (2008) 等のように観測誤差が無い

¹⁹⁾ モデルの推定に当たっては、名目利率も観測変数であるが、本稿では名目利率のデータに観測誤差はないものと仮定しているため、図示していない。

ケースでは、実質賃金とインフレ率データのボラタイルな動きを価格や賃金のマークアップショックつまりモデルの構造ショックとして捕捉していた。本稿のように観測誤差を考慮に入れるケースでは、これらのボラタイルな動きの大部分は、構造ショックとしてではなく観測誤差として捉えられており、モデルの状態変数としての実質賃金ならびにインフレ率は著しく平滑化されている。この結果は、実質賃金とインフレ率をボラタイルな状態変数として捉えてきた従来の DSGE モデルとは対照的である。

さらに、実質賃金とインフレ率を滑らかな状態変数と捉えるか、あるいはボラタイルな状態変数と捉えるかでは、価格ならびに賃金に係る構造パラメータの推定に当然影響を及ぼすものと考えられ、前段でも指摘した通り、価格や賃金のインデクセーションと賃金のカルボパラメータの両ケースの間での事後分布の推定結果の差として現れたものと思われる。現に、観測誤差が無いケースでは、価格のインデクセーションの事後平均が 0.304 だった一方で、観測誤差が有るケースでは事後平均が 0.817 となっており、インフレ率はより粘着的な状態変数として捉えられている。賃金のインデクセーションについても、観測誤差が無いケースでは事後平均が 0.395 であったのに対し、観測誤差が有るケースでは 0.678 であった。賃金のカルボパラメータに関しても、観測誤差が有るケースでの事後平均は 0.685 で、無しのケースの 0.355 よりも高い値であり、賃金がより硬直的な状態変数として捉えられている。このことから、観測誤差が有るケースにおける実質賃金とインフレ率の平滑結果は、表 2 で報告されたパラメータの推定結果と整合的であると言える。

5.4 歴史分解

次に、観測誤差が無いケースと有るケースでの歴史分解の結果について報告する。歴史分解とは、ある観察されたデータについて各構造ショックの寄与度を計算し、データの過去の動きを構造ショックによって説明する試みである。歴史分解は Smets and Wouters (2003, 2007) や Sugo and Ueda (2008) でも為されており、本稿もそれに倣うものである。本稿では、観測誤差の影響が比較的大きかったインフレ率と実質賃金のデータに焦点を当てて歴史分解の結果について報告する²⁰⁾。

図 2 において、上段に観測誤差が無いケースでのインフレ率の歴史分解を示し、下段に観測誤差が有るケースでのインフレ率の歴史分解を示している。ここで、観測誤差が無いケースでの歴史分解 (図 2 上段) では、便宜上、価格と賃金に関するマークアップショッ

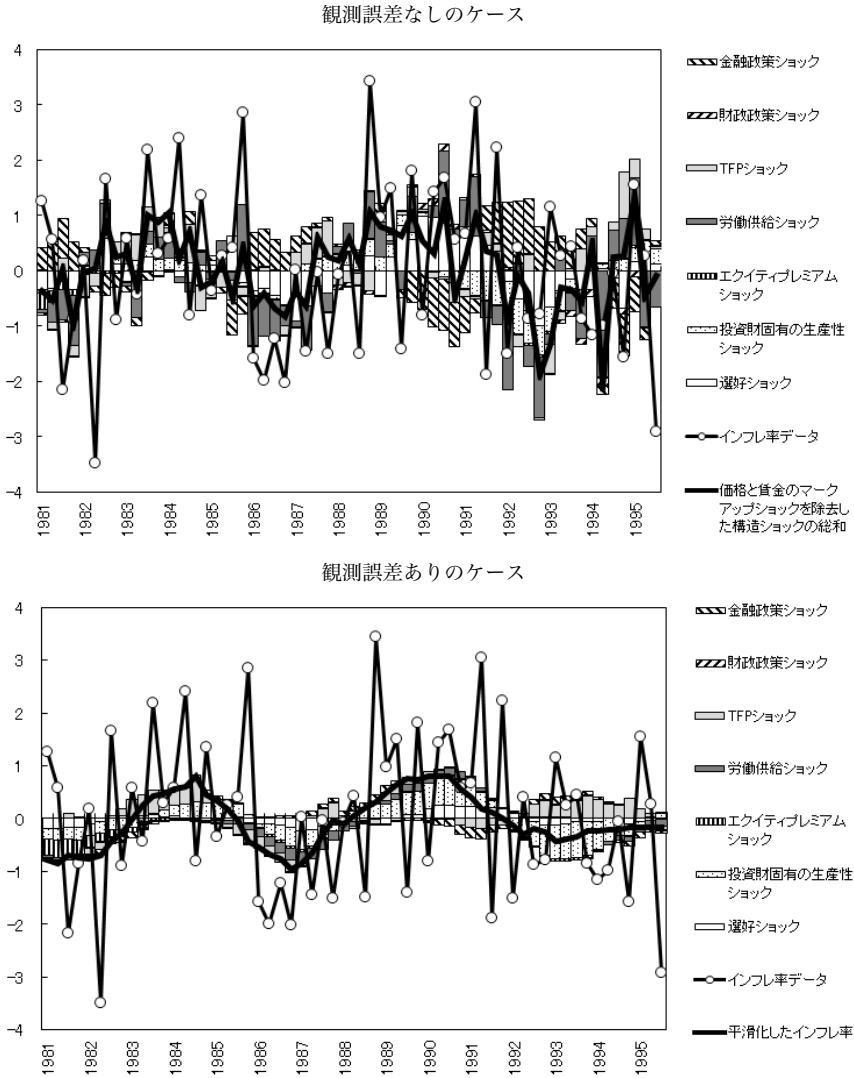
²⁰⁾ 図 2 および図 3 の観測誤差なしの DSGE モデルの歴史分解は、MH アルゴリズムからサンプリングした構造パラメータの事後平均から、カルマンスムーザを利用して構造ショック ϵ_t の推定値を導出し、これを使って脚注 16) と同様に (3.11) 式に基づいて算出した。したがって 3.2 節でも述べたように、この事後分布は作成できない。他方で、観測誤差ありの DSGE モデルの歴史分解の作成にあつては、構造ショックの事後分布をサンプリングしているので、これから歴史分解の事後分布を作成している。図 2 および図 3 の観測誤差ありの DSGE モデルでは歴史分解の事後平均の値を図示した。

クの寄与度については除去してあり、観測誤差が有るケースの歴史分解（図2下段）では、観測誤差の寄与度について除去してある。これは、両ケース共通である7つの構造ショック²¹⁾による寄与度の比較を容易にするためである。なお、図2における実線は、観測誤差が無いケースでは価格と賃金のマークアップショックの寄与度を除いた7つの構造ショックの寄与度の和を示しており、観測誤差が有るケースでは観測誤差の寄与度を除いた7つの構造ショックの寄与度（つまり、平滑化したインフレ率）を示している。

まず、両ケースにおける実線に着目すると、インフレ率の基調的な動きについては概ね合致しているものの、観測誤差が無いケースにおいては価格と賃金のマークアップショックの影響を除去してもなおボラタイルが動きを示しているのに対し、観測誤差が有るケースにおいては顕著に平滑化されている。各構造ショックによる歴史的貢献について見てみると、その内容が両ケースにおいて大きく異なることが見て取れる。観測誤差が無いケースにおいては、主に選好ショック、金融政策ショック、労働供給ショックによる歴史的貢献が大きいのに対し、観測誤差が有るケースでは、主に投資財固有の生産性ショックとTFPショックによる歴史的貢献が大きい。まとめると、両ケースともインフレ率の基調的な動きについては概ね合致しているが、どの構造ショックがインフレ率の動きに対して説明力を持つかという歴史分解の内容については大きく異なる結果となった。

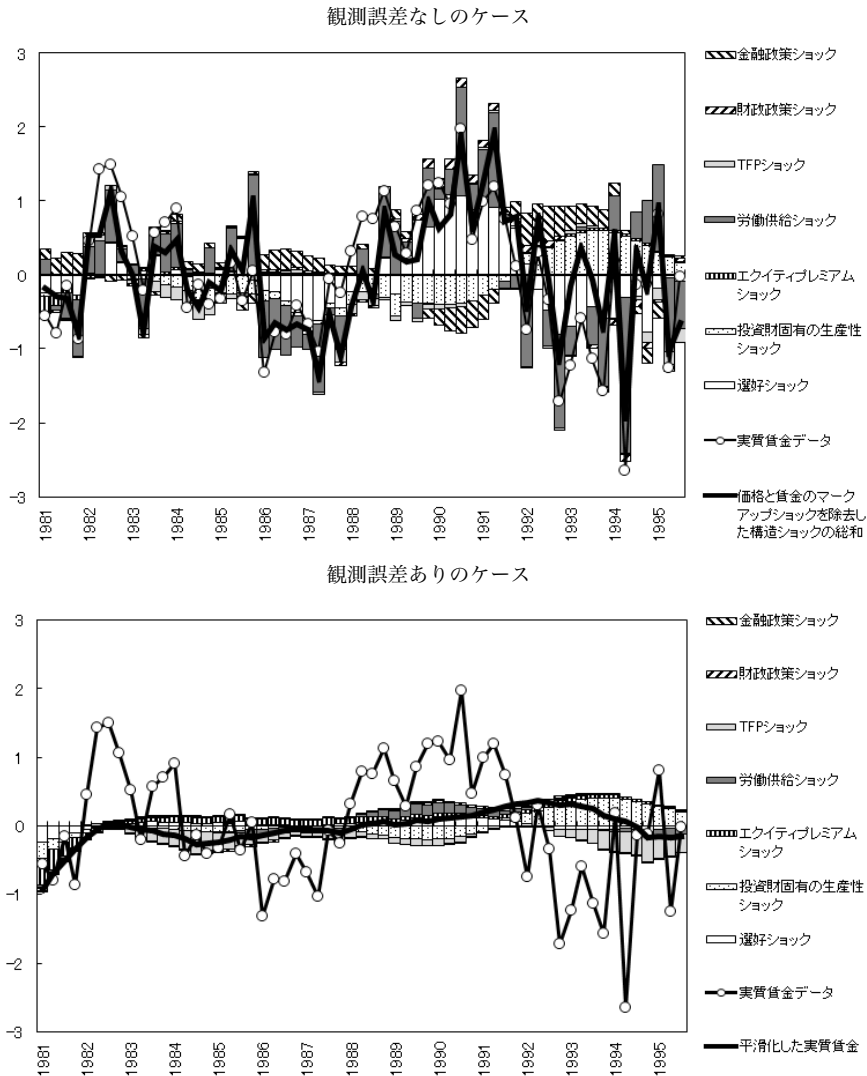
次に図3において、実質賃金の歴史分解の結果を報告する。図の読み方は、図2と同じ要領である。両ケースにおける実線に着目すると、観測誤差の無いケースでは実際の賃金データに比較的近い動きが見て取れる一方、観測誤差の有るケースでは顕著に平滑化されており、賃金データのボラタイルな動きはほとんど観測誤差として処理されていることがわかる。各構造ショックによる歴史的貢献を見ると、観測誤差が無いケースにおいては選好ショックと労働供給ショックの貢献が大きく、副次的に金融政策ショックと投資財固有の生産性ショックの貢献が認められる。特に労働供給ショックの貢献はボラタイルであり、観測誤差の無いケースにおける賃金の基調的な動きをボラタイルにしている結果となっている。観測誤差の有るケースにおける各構造ショックの歴史貢献を見ると、平滑化された賃金の動きは主に投資財固有の生産性ショックとTFPショックによって説明されており、観測誤差の無いケースとは対照的に、労働供給ショックによる貢献はほとんど認められない。まとめると、賃金の基調的な動きに関する推定結果は両ケースで大きく異なる結果となり、歴史分解の結果（特に労働供給ショックの歴史的貢献）についても大きく異なる結果となった。

²¹⁾ ここで共通の7つの構造ショックとは、選好ショック、投資財固有の生産性ショック、エクイティプレミアムショック、労働供給ショック、TFPショック、財政支出ショック、金融政策ショックを指す。



注) 観測誤差なしのケースでは MH アルゴリズムを用いて推定し、観測誤差ありのケースでは複合 MCMC 法を用いて推定している。なお、本文でも言及しているとおり、価格のマークアップショックおよび賃金のマークアップショックという2つの構造ショックは、観測誤差と識別することが困難であるため、観測誤差ありのケースで推定を行う際には、モデルから除外している。一方、観測誤差なしのケースでは構造ショックとして価格と賃金のマークアップショックを含めている。しかし、上記歴史分解の図は、観測誤差ありのケースとの比較を容易にするため、これら2つの構造ショックを積み上げずに作成している。この場合、実線は価格のマークアップショックおよび賃金のマークアップショック以外の構造ショックの総和を表している。

図2 歴史分解：インフレ率。



注) 観測誤差なしのケースでは MH アルゴリズムを用いて推定し、観測誤差ありのケースでは複合 MCMC 法を用いて推定している。なお、本文でも言及しているとおり、価格のマークアップショックおよび賃金のマークアップショックという2つの構造ショックは、観測誤差と識別することが困難であるため、観測誤差ありのケースで推定を行う際には、モデルから除外している。一方、観測誤差なしのケースでは構造ショックとして価格と賃金のマークアップショックを含めている。しかし、上記歴史分解の図は、観測誤差ありのケースとの比較を容易にするため、これら2つの構造ショックを積み上げずに作成している。この場合、実線は価格のマークアップショックおよび賃金のマークアップショック以外の構造ショックの総和を表している。

図3 歴史分解：実質賃金。

5.5 モデル選択

では果たして、観測誤差をもつ DSGE モデルは観測誤差がないモデルに比して優れているのだろうか。これを議論するため、以下の式のようなベイズファクター B_{10} により、これら 2 つのモデル選択を行った。

$$B_{10} = \frac{p(Y | M_1)}{p(Y | M_0)}$$

ここで、 $p(Y | M_i)$ はモデル M_i の周辺尤度である。MCMC を用いた周辺尤度の算出法にあたって、Geweke (1999) の修正調和平均法を採用した²²⁾23)。

表 3 には、各モデルの対数周辺尤度とその標準誤差、およびベイズファクターの対数値 $\log(B_{10})$ が示してある。観測誤差ありのモデルの観測誤差なしのモデルに対するベイズファクターの対数値は約 80 と極めて大きい値を示している。Kass and Raftery (1995) の研究では、ベイズファクターの対数値が 5 を超えれば、比較するモデルに対して非常につよく

²²⁾ 周辺尤度を計算するために用いた観測誤差ありの DSGE モデルの状態空間モデルは次のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t \\ \mathbf{e}_t \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t \\ \mathbf{e}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{t-1} \\ \mathbf{e}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\theta)\boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\nu}_t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

同様に、観測誤差なし DSGE モデルの状態空間モデルは次のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \Lambda \mathbf{S}_t, \\ \mathbf{S}_t &= \mathbf{G}(\theta) \mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{H}(\theta) \boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{aligned}$$

それぞれのモデルともに第 1 式が観測方程式であり、第 2 式が遷移方程式である。各式のノーテーションは 3.1 節と同じである。

(very strong) 支持できることが示唆されている²⁴⁾。したがって、日本のマクロ経済データ Y に対して、観測誤差を付加することは Smets and Wouters 型の DSGE モデルの推定精

²³⁾ Geweke (1999) の修正調和平均法のモデル M の周辺尤度 $p(Y|M)$ は、事後分布 $p(\theta|Y, M)$ からサンプルされたパラメータ $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ を利用して、以下の式から算出できる。

$$p(Y|M) \approx \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{C_g g(\theta_i)}{p(Y|\theta_i, M) \times C_p p(\theta_i|M)} \right]^{-1}$$

ここで、 N はサンプル数、 $p(Y|\theta_i, M)$ は尤度関数、 $p(\theta_i|M)$ は事前分布である。また $g(\theta_i)$ は任意の確率密度関数である。 C_p, C_g は、それぞれ $p(\theta_i|M)$ と $g(\theta_i)$ の基準化定数である。任意の関数 $g(\theta)$ として、Geweke (1999) の修正調和平均法では、以下の切断正規分布を採用する。

$$g(\theta) = \tau^{-1} (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \right] \times I \left[(\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \leq F_{\chi_k^2}^{-1}(\tau) \right]$$

ここで k はパラメータ θ の数であり、 I は括弧内の値が真の場合では 1 になりそれ以外は 0 となる指示関数である。 $F_{\chi_k^2}^{-1}(\tau)$ は自由度 k の χ^2 分布の累積分布関数の逆関数である。切断される累積密度の面積は $\tau = 0.95$ とした。

ただし、本稿のような DSGE モデルの周辺尤度の算定では、事前分布 $p(\theta_i|M)$ や多変量正規分布 $g(\theta)$ の基準化定数 C_p, C_g に留意せねばならない。すなわち、パラメータ θ の事前・事後分布は、合理的期待均衡が一意にならないケース (均衡解の不定定性や非存在) が切断された分布であるので、事前分布 $p(\theta_i|M)$ や多変量正規分布 $g(\theta)$ の確率密度は切断されていない範囲での積分が 1 になるようにそれぞれ基準化定数により調整する必要がある。この基準化定数の算出の手順は次のとおりである。まず事前分布 $p(\theta_i|M)$ から発生させた 10000 個のパラメータ θ から Sims (2002) の手法で DSGE モデルを解き、一意の解となった N_p 個のサンプルを切断していない分布の範囲として、基準化定数を $C_p = 10000/N_p$ とした。多変量正規分布 $g(\theta)$ についても 10000 個のパラメータ θ を発生させて同様な手順で基準化定数を $C_g = 10000/N_g$ とした。

また、対数周辺尤度の標準誤差の数値計算はデルタ法を利用した。つまり、上の周辺尤度の算定式の右辺の項の自然対数を関数 $f = -\log_e \left[\frac{g(\theta)}{p(Y|\theta, M) p(\theta|M)} \right]$ として、数値計算でパラメータの事後平均 $\bar{\theta}$ でのヤコビアン $\partial f / \partial \theta$ をもとめ、これとパラメータの事後平均 $\bar{\theta}$ の分散共分散行列 Σ_θ から計算した $\sqrt{(\partial f / \partial \theta)' \Sigma_\theta (\partial f / \partial \theta)}$ を対数周辺尤度の標準誤差とした。デルタ法については、たとえば、Hayashi (2000, p. 93) に説明がある。なお、周辺尤度の計算方法について、藤原・渡部 (2011) の補論 C に詳しい記述がある。

²⁴⁾ Kass and Raftery (1995, p. 777) によれば、Jeffreys (1961, Appendix B, p. 432) では、次のようにベイズファクターによるモデル選択の基準が示されている。

$\log_{10}(B_{10})$	(B_{10})	Evidence against H_0
0 to 1/2	1 to 3.2	Not worth more than a bare mention
1/2 to 1	3.2 to 10	Substantial
1 to 2	10 to 100	Strong
> 2	> 100	Decisive

しかし、彼の基準のスケールは \log_{10} をベースになされており MCMC 等のカリブレーションを使ったモデル選択では不向きなため、Kass and Raftery (1995) では、以下のように、尤度比検定や情報量基準と同じスケールである $2 \log_e(B_{10})$ に変換した基準を提案した。この基準では各判定基準の単位はスケールに合わせて、Jeffreys (1961) が利用した 10 から 20 へ変更している。

$2 \log_e(B_{10})$	(B_{10})	Evidence against H_0
0 to 2	1 to 3	Not worth more than a bare mention
2 to 6	3 to 20	Positive
6 to 10	20 to 150	Strong
> 10	> 150	Very Strong

度および予測精度を高めることに大きく寄与すると考えることができる。

観測誤差ありのモデルが周辺尤度で観測誤差なしのモデルより優れる理由は以下の2点が考えられる。

1点目の理由として、実質賃金やインフレ率のデータの短期的にボラタイルな動きを、構造ショックとして捉えるか、あるいは観測誤差として捉えるかの差が各モデルの周辺尤度の差として現れたと考えられる。観測誤差がないケースにおいては、短期的にボラタイルな動きをマークアップショックという構造ショックとして捉えているが、構造ショックである以上、その影響は実質賃金あるいはインフレ率といった状態変数のみならず、他の状態変数にも影響が波及する。マークアップショックが短期的にボラタイルに変化すれば、実質賃金やインフレ率のボラタイルな動きは説明しやすくなるかもしれないが、他の状態変数にまでもボラタイルな動きを強いることとなり、結果としてモデル全体としての予測精度が犠牲となることが考えられる。一方で観測誤差があるケースでは、実質賃金やインフレ率のデータの短期的にボラタイルな動きを観測誤差として捉えているため、他の状態変数に与える影響は限定的であり、ボラタイルな動きを強いられることはない。このため、産出、消費、投資、労働といった比較的緩やかな動きを示すデータを、過度にボラタイルな動きを強いられることなく緩やかなまま平滑化することができ、モデル全体としての予測精度が犠牲となりにくいと考えられる。この差が、観測誤差がないケースとあるケースにおける周辺尤度の差として現れたと考えることができる。

2点目として、観測誤差ありのモデルの周辺尤度が大きくなる理由は、観測方程式のパラメータである R, Ψ の事前分布の分散の値を非常に緩く設定している点である。これにより事後分布からサンプルされたパラメータの事前分布の密度 $p(R, \Psi | M)$ は大きい値をとる。他方で、構造パラメータ θ の事前分布の分散は狭く設定してあるので MCMC からサンプリングされた構造パラメータの事前分布の密度は小さくなる。観測誤差なしのモデルではパラメータ R, Ψ はないので、この点が観測誤差ありのモデルの周辺尤度の値を大きくすると考えられる。

6. 結語

本稿は、シミュレーションスムーザによる平滑法を有する複合 MCMC 法を利用して、観測誤差を持つ DSGE モデルの汎用的な推定法を提案した。Boivin and Giannoni (2006) および Kryshko (2010) は、AR(1) 過程をもつ観測誤差を想定した DSGE モデルに対して複合 MCMC 法を提案し、状態変数の平滑法に際して Carter and Kohn (1994) の手法を採用した。しかし、Carter and Kohn の手法は、状態変数の分散共分散行列のサンプリング中に非正定値行列が発生することでサンプリングが中断してしまうという問題が生じる。そこで本稿では状態変数の平滑法として、de Jong and Shephard (1995) が提案したシミュ

表3 対数周辺尤度とベイズファクター.

	修正調和平均法による対数周辺尤度 (Geweke (1999))	対数周辺尤度の標準誤差
観測誤差あり	-561.206	0.503
観測誤差なし	-643.669	0.176
<hr/>		
ベイズファクターの対数値	82.463	

注)

1. 修正調和平均法では、95%で切断した多変量切断正規分布を利用した。
2. ベイズファクターの対数値は、観測誤差ありのモデルの対数周辺尤度から観測誤差なしのモデルのものを差し引いた。

レーションスムーザを採用することによりこの問題を克服した。

本稿ではまた、日本のマクロデータを利用して、観測誤差の有る DSGE モデルの推定結果（複合 MCMC 法を用いた推定）と、観測誤差が無い DSGE モデルの推定結果（MH アルゴリズムを用いた推定）との比較を行った。観測誤差が無い従来のケースと観測誤差が有る本稿のケースとでは、構造パラメータや構造ショックの推定結果、ならびに歴史分解の結果において無視し難い差異が生じることを示した。また、ベイズファクターに基づくモデル選択を行ったところ、観測誤差が有るモデルが無いモデルに比して非常に強く支持される結果となった。これは観測誤差が有るモデルによる予測精度が、無いモデルに比して高いことを意味する。

従来の DSGE モデルのように、インフレ率や実質賃金データに見られるボラタイルな動きをマークアップショックとして捉えるアプローチは、これらをモデルの構造ショックとして扱うことを意味しており、ボラタイルな動きを観測誤差（つまり非構造ショック）として扱う本稿のアプローチとは本質的に異なる。そのため、両ケースの間で推定結果に無視し難い差異が生じたものと推察される。インフレ率や実質賃金のボラタイルな動きを構造ショックと見るか、あるいは観測誤差と見るかは、研究者の嗜好・主観にも依存するが、Stock and Watson (2007), Cogley *et al.* (2010), Edge and Gürkaynak (2010) 等によって報告されているように、近年インフレ率がノイズのような挙動を示すためその予測が困難となりつつある現状を鑑みれば、インフレ率や実質賃金のボラタイルな動きは、モデルの構造ショックとしてではなく、観測誤差として取り扱う方がより現実的と思われる。そして、観測誤差を伴う DSGE モデルの推定の際には、シミュレーションスムーザによる平滑法を有する複合 MCMC 法が有用であるものとする。

謝辞

本稿の作成にあたり、匿名のレフリーより非常に有益なコメントをいただいた。また、特

集「MCMC の経済・経営データへの応用」での編集にあたっては、青嶋誠編集長、大森裕浩氏、渡部敏明氏（特集担当）の諸先生方に大変にお世話になった。さらに、2011年2月19日、20日に開催された一橋大学におけるマクロ計量分析研究会において、塩路悦朗氏、陣内了氏、福重元嗣氏、藤原一平氏、松本哲人氏、渡部敏明氏の諸先生方から有益なコメントをいただいた。加えて、内閣府にて、岩田安晴氏、岩本光一郎氏、小川貴之氏、小野善康氏、西崎文平氏、蓮見亮氏、長谷川秀司氏、濱秋純哉氏、符川公平氏、堀田繁氏、森浩太氏、矢野浩一氏の諸先生方から貴重なコメントをいただいた。ここに記して感謝したい。ただし、有り得べき誤りの責任は全て著者に帰する。また、本稿の見解は著者に属し、必ずしも内閣府経済社会総合研究所の見解を反映するものではない。

参 考 文 献

- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. (1976). A matrix Kronecker lemma, *Linear Algebra Appl.*, **15**, 227–234.
- Anderson, E. W., Hansen, L. P., McGrattan, E. R. and Sargent, T. J. (1996). Mechanics of forming and estimating dynamic linear economics, *Handbook of Computational Economics*, **1** (eds. H. M. Amman, D. A. Kendrick and J. Rust), chap. 4.
- Blanchard, O. and Kahn, C. (1980). The solution of linear difference models under rational expectations, *Econometrica*, **48**, 1305–1311.
- Boivin, J. and Giannoni, M. (2006). DSGE models in a data-rich environment, NBER Working Papers 12772.
- Carter, C. and Kohn, R. (1994). On Gibbs sampling for state space models, *Biometrika*, **81**, 541–553.
- Chari, V. V., Kehoe, P. and McGrattan E. (2009). New Keynesian models: Not yet useful for policy analysis, *American Economic Journal: Macroeconomics*, **1**, 242–266.
- Chib, S. (2001). Markov chain Monte Carlo methods: Computation and inference, *Handbook of Econometrics*, **5** (eds. J. J. Heckman and E. Leamer), North Holland, pp. 3569–3649.
- Chib, S. and Greenberg, E. (1994). Bayes inference in regression models with ARMA(p, q) errors, *J. Econom.*, **64**, 183–206.
- Chib, S. and Rumamurthy, S. (2010). Tailored randomized block MCMC methods with application to DSGE models, *J. Econom.*, **155**(1), 19–38.
- Cogley, T., Primiceri, G. E. and Sargent, T. J. (2010). Inflation-gap persistence in the US, *American Economic Journal: Macroeconomics*, **2**, 43–69.
- Christiano, L. (2002). Solving dynamic equilibrium models by a method of undetermined coefficients, *Computational Economics*, **20**, 21–55.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M. and Evans, C. (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy, *J. Polit. Econ.*, **113**, 1–45.
- Del Negro, M., Schorfheide, F., Smets, F. and Wouters, R. (2007). On the fit of new Keynesian models, *J. Bus. Econ. Stat.*, **25**, 123–143.
- Durbin, J. and Koopman, S. J. (2002). A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis, *Biometrika*, **89**, 603–616.
- Edge, R. M. and Gürkaynak, R. S. (2010). How useful are estimated DSGE model forecasts for central bankers?, *Brookings Pap. Econ. Act.*, **2**, 209–244.
- Fueki, T., Fukunaga, I., Ichiue, H. and Shirota, T. (2010). Measuring potential growth with an estimated DSGE model of Japan's economy, Bank of Japan Working Paper Series, No. 10-E-13.
- 藤原一平, 渡部敏明 (2011). 「マクロ動学一般均衡モデル —サーベイと日本のマクロデータへの応用—」『経済研究』 **62**, 66–93.
- Fujiwara, I., Hirose, Y. and Shintani, M. (2011). Can news be a major source of aggregate fluctuations? A Bayesian DSGE approach, *J. Money, Credit Bank.*, **43**, 1–29.

- Gali, J., Gertler, M. and Lopez-Salido, J. D. (2001). European inflation dynamics, *Eur. Econ. Rev.*, **45**, 1237–1270.
- Gamerman, D. and Lopes, H. F. (2006). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference* (2nd ed.), Chapman & Hall CRC Texts in Statistical Science.
- Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moments, *Bayesian Statistics*, **4** (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith), Clarendon Press.
- Geweke, J. (1999). Using simulation methods for Bayesian econometric models: Inference, development and communication, *Econom. Rev.*, **18**(1), 1–126.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*, Princeton University Press.
- 林丈夫 (1986). 「恒常所得仮説の拡張とその検証」『経済分析』**101**, 1–23.
- 飯星博邦 (2011). 「マクロ経済変数のトレンドとサイクルの分離法の検証—日本の実質 GDP と失業率への応用—」 ESRI Discussion Paper Series No. 261.
- Iiboshi, H., Nishiyama, S.-I. and Watanabe, T. (2006). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the Japanese economy: A Bayesian analysis, mimeo.
- Iiboshi, H., Matsumae, T., Namba, R. and Nishiyama, S.-I. (2011). Estimating a DSGE model for Japan in a data-rich environment, mimeo.
- Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*, 3rd ed., Oxford University Press.
- de Jong, P. and Shephard, N. (1995). The simulation smoother for time series, *Biometrika*, **82**, 339–350.
- Justiniano, A. and Primiceri, G. E. (2008). Potential and natural output, mimeo.
- Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995). Bayes factors, *J. Am. Stat. Assoc.*, **90**, 773–795.
- Kim, S., Shephard, N. and Chib, S. (1998). Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models, *Rev. Econ. Stud.*, **65**, 361–394.
- King, R. G. and Rebelo, S. T. (1999). Resuscitating real business cycles, *Handbook of Macroeconomics* (eds. J. B. Taylor and M. Woodford), **1**, chap. 14, 927–1007.
- Kryshko, M. (2010). Data-rich DSGE and dynamic factor models, mimeo.
- Levin, A., Onatski, A., Williams, J. and Williams, N. (2005). Monetary policy under uncertainty in micro-founded macroeconomic models, *NBER Macroeconomics Annual*, **20**, 229–287.
- 中妻照雄 (2003). 『ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析』三菱経済研究所.
- Neal, P. J. and Roberts, G. O. (2008). Optimal scaling for random walk metropolis on spherically constrained target densities, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **10**, 277–297.
- Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994). Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap, *J. R. Stat. Soc., B*, **56**, 3–48.
- Nishiyama, S.-I., Iiboshi, H., Matsumae, T. and Namba, R. (2011). How bad was Lehman shock?: Estimating a DSGE model with firm and bank balance sheets in a data-rich environment, mimeo.
- Onatski, A. and Williams, N. (2010). Empirical and policy performance of a forward-looking monetary model, *J. Appl. Econ.*, **25**, 145–176.
- Roberts, G. O., Gelman, A. and Gilks, W. (1997). Weak convergence and optimal scaling of random walk metropolis algorithms, *Ann. Appl. Probab.*, **7**, 110–120.
- Rosenthal, J. S. (2011). Optimal proposal distributions and adaptive MCMC, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (eds. S. Brooks, A. Gelman, G. Jones and X.-L. Meng), chap. 4.
- Schorfheide, F., Sill, K. and Kryshko, M. (2010). DSGE model-based forecasting of non-modelled variables, *Int. J. Forecast.*, **26**, 348–373.
- Sims, C. (2002). Solving linear rational expectations models, *Computational Economics*, **20**, 1–20.
- Smets, F. and Wouters, R. (2003). An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the Euro area, *Journal of the European Economic Association*, **1**, 1123–1175.
- Smets, F. and Wouters, R. (2007). Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach, *American Economic Review*, **97**, 586–606.
- Stock, J. H. and Watson, M. W. (2007). Why has U.S. inflation become harder to forecast?, *J. Money, Credit Bank.*, **39**, 13–33.

- Sugo, T. and Ueda, K. (2008). Estimating a dynamic stochastic general equilibrium model for Japan, *J. Jpn. Int. Econ.*, **22**, 476–502.
- de Walque, G., Smets, F. and Wouters, R. (2006). Firm-specific production factors in a DSGE model with Taylor price setting, *International Journal of Central Banking*, **2**, 107–154.
- 渡部敏明 (2009). 「マルコフ・スイッチング・モデルを用いた日本の景気循環の計量分析」『経済研究』**60**(3), 253–265.
- Yano, K. (2009). Dynamic stochastic general equilibrium models under a liquidity trap and self-organizing state space modeling, ESRI Discussion Paper Series No. 206.