

粒子フィルタによる信用リスクの推定

三崎 広海*

Credit Risk Estimation with a Particle Filter

Hiroumi Misaki*

信用リスク・モデルの一種である誘導型モデルにおいて、粒子フィルタリングの手法を用いてインプライド・デフォルト強度を推定する。デフォルト強度を状態変数に含めることで、デフォルト強度と社債の市場価格の関係が一般化状態空間モデルとして記述され、粒子フィルタによる推定が可能となる。実証分析は Takahashi and Sato (2001) で推定されたモデルを拡張し、日本国内市場で観測される固定利付普通社債に対して粒子フィルタを適用した。結果はデフォルト強度の推定値について妥当であり、誘導型モデルの推定問題に対する粒子フィルタの実用性が示された。

This paper is developing a new estimation method of the default intensity implied in the price of defaultable corporate bonds. We formulate the reduced form credit risk model as a nonlinear state space model and use the particle filtering method to estimate the default intensity. We extend the term-structure model proposed by Takahashi and Sato (2001) and incorporate the default intensity. By using the Japanese corporate bond market, we shall show that our estimation method gives a reasonable result.

キーワード: 信用リスクの推定, 誘導型モデル, デフォルト強度, 社債, 一般化状態空間モデル, 粒子フィルタ.

1. はじめに

ファイナンスにおける信用リスク・モデルには様々な種類があるが、このうち数理ファイナンス理論に基づく方法は基本的に「構造型」と「誘導型」という2つのアプローチに大別される¹⁾。構造型モデルは Merton (1974) を端緒とし、option based model やバランシート・アプローチとも呼ばれる。これは資産価値を表す確率過程 V_t を定め、これがある閾値を下回ることをデフォルト（債務不履行）と定義するモデルである。この枠組みでは債券価格はオプションと同様にして求めることができる。例えば社債の額面価値を D とし、満期 T 時点で債務超過の場合にデフォルトが起こるとすると、 T における社債の価値

* 東京大学大学院経済学研究科・日本学術振興会特別研究員 DC. ㊦ 113-0033, 東京都文京区本郷 7-3-1 (E-mail: hiroumi.misaki@gmail.com).

¹⁾ 信用リスク・モデルの分類については中川 (2008) に詳しい。

は $\min(V_T, D)$ であり²⁾, これはオプション取引で言う「プットの売り」³⁾に相当する. 一方で誘導型モデルは, intensity model 等とも呼ばれ, デフォルトを引き起こす要素をモデル化するもので, デフォルトはある点過程のジャンプの発生として定義される. このタイプのモデルは無リスク債券の期間構造に関する議論と数学的に類似しており, 状態空間表現を与えることでデフォルト・リスクを評価することができる. 本稿ではこの誘導型モデルを扱う.

誘導型モデルにおいてジャンプの発生する度合いを表す変数をデフォルト強度 (default intensity) といい, これが低いほど信用リスクが高いとみなされる. 社債発行企業の信用リスクの推定には, 財務情報などにに基づきデフォルト強度を被説明変数として推定する方法もあるが, 第2節で述べるように本稿では社債の市場価格を所与として, そこに織り込まれているデフォルト強度, すなわちインプライド・デフォルト強度 (implied default intensity) を推定する. このようにして得られたデフォルト強度は, 当該企業を対象とするクレジット・デフォルト・スワップ (CDS)⁴⁾のプレミアム設定等に利用できると考えられる.

短期金利とデフォルト強度の過程が与えられれば, Duffie and Singleton (1999) の公式によりゼロクーポン社債価格が求められる. このようなデフォルト強度と社債価格の関係は, 後述のように, 状態空間モデルを利用して記述することができる. 従って, 観測価格からデフォルト強度を推定する問題は, フィルタリングによる状態推定の問題に帰着する.

線形ガウス状態空間モデルに対する状態推定の方法としては従来よりカルマン・フィルタやその拡張が利用されてきた. 例えば Duffee (1999) は CIR 過程 (Cox *et al.* (1985)) に従う3つの潜在時系列 (いわゆる3ファクター) を状態変数とし, それらの線形結合で短期金利 r と強度 λ を表現するモデルを考え, 拡張カルマン・フィルタを用いてデフォルト率の推定を行っている. また Chen and Scott (2003) も CIR 過程のマルチファクターモデルに対してカルマン・フィルタを用いて推定を行っている.

しかし, カルマン・フィルタを用いるためには, システム方程式・観測方程式ともに線形ガウスであり, 観測対象の理論価格の解析解が求められる必要がある. また, カルマン・フィルタで推定可能なモデルのクラスでは, 金利 r と強度 λ の確率過程の非負性と負の相関の両立が保証されないなどの問題もある. これに対して本稿では, 計算機集約的な方法

2) T において社債権者の受け取りは, 企業継続時には額面通りに D , デフォルト時には残余資産の清算を受けて V_T となるからである.

3) この場合のプットとはヨーロッパ・プット・オプションであり, 「株式などの原資産を, 定められた期日 (満期) に特定価格 (権利行使価格) で売る権利」のことである. 「プットの売り」の価値とは, この権利を売る側から見た価値のこと.

4) 契約相手に定期的に一定のプレミアムを支払う代わりに, 自己の保有する債権がデフォルトした場合, 契約相手から損失相当額を受け取る事のできる権利をプロテクションという. CDS とは, プロテクションの売買により, プロテクションの買い手のリスクを売り手に移転する取引である (楠岡他 (2001) 等参照).

である粒子フィルタを用いることで、非負性と負の相関の両立を含むような、より柔軟なモデル化に対する推定が可能となることを示す。特に本稿では非線形状態空間表現を利用することで、粒子フィルタによってインプライド・デフォルト強度を推定する。

関連する先行研究として、Takahashi and Sato (2001) はデフォルト・リスクの無い金利の期間構造モデルに対して粒子フィルタが適用可能であることを示している。また Zhou *et al.* (2008) はジャンプ付き CIR 過程に粒子フィルタを用いて米国の住宅ローンの信用リスクを分析している。本稿では Takahashi and Sato (2001) で採用されたモデルの一つを拡張し、デフォルト強度を状態変数に加えて、金利ファクターと同時に強度を推定する方法を提示し、実証分析を行う。この実証分析は、上記先行研究も含めた粒子フィルタによる経済時系列分析の中でも、非常に大きな計算負荷を必要とする研究であるが、近年の計算機能力の向上によって、このような大規模な数値計算も可能となっている。

本稿の構成は以下の通りとなる。第2節では本稿で採用された誘導型モデルの数理的背景を概観し、モデルが状態空間表現として記述できることを示す。第3節で粒子フィルタの手法を説明した後、第4節において日本の国内市場における社債価格を使って実証分析を行い、その結果を示す。

2. 誘導型モデルとその状態空間表現

2.1 状態変数の導入

本稿で用いるモデルの基本は金利期間構造モデルであり、利率や満期など契約内容が異なる多種多様な金融時系列の背後に、それらの動きを説明する少数の共通因子（ファクター）を想定することからしばしばファクターモデルと呼ばれる。ファイナンスの理論では、ゼロクーポン債（割引債）という、その所有者が満期においてキャッシュフロー1単位を受け取る債券を組み合わせて、様々な契約条件の債券を統一的に扱うことが多いが、ファクターモデルの枠組みでは、このゼロクーポン債の価格をファクターの関数として表すことにより、多くの債券の価格が少数のファクターに基づき説明されるのである。ファクターは観測されない潜在時系列であり、その時間遷移は分析者がモデルとして与える。なお、このような潜在時系列は状態変数とも呼ばれるが、本稿では統計学的な議論においては状態変数と言い、ファイナンス理論における解釈を強調する場合にはファクターと呼ぶことにする。本節ではファクターモデルを構成する典型的な方程式の形と、それが観測値に結び付けられる仕組みの一般形を説明する（詳しくは Björk (2004) 等を参照されたい）。

まず、状態変数が従う過程について簡潔に述べる。確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) の下で、 d 次元の状態変数 X_t がマルコフ過程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (2.1)$$

に従うとする。ここで B_t は n 次元ブラウン運動、 μ, σ はそれぞれ $d \times 1$, $d \times n$ の係数ベクトル及び行列である。時刻 t における瞬時的短期金利 $r(X_t)$ が X_t の関数で表されるとする。このとき満期 T の無リスク・ゼロクーポン債の時刻 t における価格 $P(t, X_t; T)$ は、満期のキャッシュフロー（すなわち 1）を将来の短期金利で割り引いた期待値

$$P(t, X_t; T) = E^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(X_s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.2)$$

で表される。ここで E^Q はリスク中立確率測度と呼ばれる確率測度 Q の下での期待値、 \mathcal{F}_t は t までに得られる情報からなる情報増大系をそれぞれ表す。また、この Q の下で、状態変数は

$$dX_t = \{\mu(t, X_t) - \psi(t, X_t)\} dt + \sigma(t, X_t) d\tilde{B}_t$$

という過程に従うことが知られている。ここで $d \times 1$ ベクトル $\psi(t, X_t)$ はリスクプレミアムであり、 \tilde{B}_t は Q の下でのブラウン運動である。

2.2 誘導型モデルによるゼロクーポン社債価格の評価

次に Lando (2004, Chapter 5) の記述に基づき、潜在的な共通因子の存在を仮定する誘導型の信用リスク・モデルを説明する。始めに、デフォルト強度と関係の深いハザード率 (hazard rate) に言及しておく。社債発行企業のデフォルト時刻を表す確率変数を τ とし、この企業が時刻 t までデフォルトしない確率を $\bar{F}(t) = P[\tau \geq t]$ とする。 $\bar{F}(t)$ は連続で一階微分可能な関数であり、生存関数と呼ばれる。これに対して

$$h(t) = - \frac{d}{dt} \log \bar{F}(t)$$

とおくと、

$$P[\tau \geq t] = \exp \left(- \int_0^t h(s) ds \right)$$

となる。この関数 h をハザード率という。ここで

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[\tau \leq t + \Delta t | \tau > t] = h(t)$$

であるから、 $h(t)\Delta t$ は t まで生存したという条件の下で、続く微小期間 $(t, t + \Delta t]$ のうちにデフォルトする確率を表す。

さて、ハザード率は確定的な t の関数だが、これを確率的に変動する場合に拡張することを考える。すなわち、ある確率過程 λ_t に対して、 t に続く微小期間におけるデフォルト確率が

$$P[\tau \leq t + \Delta t | \mathcal{F}_t] \simeq \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \lambda_t \Delta t \quad (2.3)$$

となるようにしたい。ここで \mathbb{I} は指示関数である。また、 \mathcal{F}_t は t までに生存か否かの情報を含み、 λ は \mathcal{F}_t -適合である。このような λ_t をデフォルト強度 (default intensity) という。

ファクターモデルの枠組みでは、 λ_t を状態変数 X_t に依存させる形で定式化することで、確率的変動を表現することができる。

デフォルト強度は、デフォルト済みか否かを示すジャンプ過程 $N_t := \mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}}$ の構成において定義される。この N はポアソン過程の一般化であり Cox 過程という⁵⁾。Cox 過程は、その確率的なジャンプの発生度合いが、確率的に変動する λ の大きさに依存することから、二重確率ポアソン過程とも呼ばれる。

Cox 過程の数学的な構成の概要は、以下ようになる。確率空間 (Ω, \mathcal{F}, Q) の下で、ジャンプに影響する状態変数である確率変数 $X_t \in \mathbb{R}^d$ と、非負関数 $\lambda: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとする。時刻 t までの状態変数の情報を含む情報増大系を $\mathcal{G}_t := \sigma\{X_s: 0 \leq s \leq t\}$ とする。また $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ とは独立に指数分布 $Exp(1)$ に従う確率変数を E_1 とする。さらにジャンプに関する情報について $\mathcal{H}_t := \sigma\{N_s: 0 \leq s \leq t\}$ とおいて、 $\mathcal{F}_t := \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ とする。つまり \mathcal{F}_t は投資家が t 時点までに入手可能な状態変数とデフォルトの有無の両方の情報を意味する。そして τ を

$$\tau := \inf \left\{ t: \int_0^t \lambda(X_s) ds \geq E_1 \right\}$$

で定義する。このとき N_t は (または τ は) 強度 $\lambda(X_t)$ を持つと言い、デフォルトの発生がこのように定義されるとき、期間 $(t, t + \Delta t]$ におけるデフォルト確率が $\lambda(X_t)\Delta t$ であると解釈できる。

次に、デフォルトの発生が Cox 過程で与えられる状況下で、デフォルト・リスクを伴うゼロクーポン債の価格を考える。このゼロクーポン債は、満期 T において発行体が存続ならキャッシュフロー 1 単位を受け取り、デフォルト到来済みならキャッシュフローを全く受け取れない債券である。これを特にゼロクーポン社債と呼び、その t 時点の価格を $V(t, X_t; T)$ で表すことにする。いま、リスク中立確率測度 Q の下で、デフォルト時刻 τ は強度 $\lambda(X_t)$ を持つと仮定する。また、 $P(t, X_t; T) = E^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(X_u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ となるような短期金利 $r(X_s)$ の存在を仮定する⁶⁾。このとき 0 時点におけるゼロクーポン社債価格は

$$V(0, X_0; T) = E^Q \left[\exp \left(- \int_0^T (r + \lambda)(X_s) ds \right) \right]$$

となる⁷⁾。すなわち、Cox 過程の設定の下で、ゼロクーポン社債価格は、無リスク・ゼロクーポン債の短期金利をデフォルト・リスクで“調整”した形で表現することができるの

⁵⁾ 一般に Cox 過程は複数回のジャンプを発生させるが、デフォルト事象は最初のジャンプと考えるので、ここでは特にジャンプ 1 回の Cox 過程の概略を示す。

⁶⁾ τ の構成より、デフォルト発生履歴を示す追加情報 \mathcal{H}_t はゼロクーポン債価格の計算には意味を持たず、 $E^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(X_u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(X_u) du \right\} \middle| \mathcal{G}_t \right]$ である (McNiel *et al.* (2005) 等参照)。

⁷⁾ Lando (2004) に従い、 $r(X_s) + \lambda(X_s)$ を $(r + \lambda)(X_s)$ と略記する。また定数 R に対しては、 $r(X_s) + (1 - R)\lambda(X_s)$ の意味で $(r + (1 - R)\lambda)(X_s)$ と記す。

である。ここで τ の定義から

$$Q(\tau > T | \mathcal{G}_T) = \exp \left(- \int_0^T \lambda(X_s) ds \right)$$

という事実を用いている。また、時刻 t までにデフォルトしていない ($\{\tau > t\}$) 場合の t 時点におけるゼロクーポン社債価格は

$$V(t, X_t; T) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (r + \lambda)(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (2.4)$$

と表現できる (以下ではこの条件付期待値を E_t^Q で表す)。

2.3 回収率の仮定

今までの議論では、デフォルトによるキャッシュフローはゼロと仮定してきた。しかし現実のデフォルト時には、債権者は清算によって債権額の一部を回収することができる。この回収の割合を回収率 (recovery rate) といい、 R で表す。債券価格のモデルにおける回収率の定義は (i) 額面に対する回収 (Recovery of face value), (ii) 市場価値に対する回収 (Recovery of market value; RMV), (iii) 国債に対する回収 (Recovery of treasury) の3つが存在する (Schönbucher (2003))。

(i) はデフォルト時、債権者は即座に額面価額の R 倍を受け取る。法実務の実態に近く、格付け機関に利用されることが多い。額面は既知なので、推定にはデフォルト後の債券価格だけがわかれば良い一方で、評価式が数学的に複雑になる点が好ましくない。(ii) はデフォルト前後の市場価格の変化の割合に基づく回収率であり、デフォルト直前の価格の R 倍を受け取る。これはデフォルトによる債権者の損失と解釈できる。計算にはデフォルト前後の価格双方が必要であるが、後述するように数学的には比較的扱いが簡単である。(iii) は社債がデフォルト後に無リスク債券 R 単位分に置き換わったとみなす方法である。以上のうち本稿では、誘導型モデルの下での扱いやすさから、(ii) の RMV を採用する。

RMV の回収率を定数 $R \in [0, 1)$ とする。このとき、Duffie and Singleton (1999) の公式によれば、満期 T のゼロクーポン社債の時刻 t における価格は、 t までにデフォルトしていないとの条件の下で、

$$E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r + (1 - R)\lambda)(X_s) ds \right\} \right] \quad (2.5)$$

で表される。本稿の実証分析では R と λ を識別せずに、式 (2.5) における $(1 - R)\lambda$ を新たに λ としたものを推定する。すなわち、以下ではゼロクーポン社債価格 (2.4) における λ は、回収率で調整した後の強度を意味するものとする。

2.4 状態空間表現

ここまでの議論から、 t 時点におけるゼロクーポン債価格 $P(t, X_t; T)$ 及び $V(t, X_t; T)$ が、 X_t の関数として表されることが分かった。また、実際の市場において観測される金融時系列データは、理論値に誤差が伴う形で観測されていると考えるのが自然である。これらを踏まえると、状態変数の過程と、誤差付きで観測される債券の価格系列の関係は、状態空間モデルとして表現される。状態空間モデルとは、システム方程式と観測方程式の組として表される時系列モデルであり、その一般形は次のように書ける。

$$x_t = f(x_{t-1}, v_t) \quad \text{システム方程式} \quad (2.6)$$

$$y_t = h(x_t, w_t) \quad \text{観測方程式} \quad (2.7)$$

ここで、 x_t は未知の状態ベクトル、 y_t は観測ベクトル、 v_t は $q(v)$ に従うシステムノイズベクトル、 w_t は観測ノイズベクトルを表し、 $t = 1, \dots, T$ である。観測値 y_t から状態変数 x_t を推定することを状態推定という。特に $\{y_1, \dots, y_t\}$ を与えたときの x_t の事後分布をフィルタ分布、それを推定することをフィルタリングという。

上記の設定では、システム方程式における x_t を状態変数 X_t と考えるので、(2.1) 式を適当に離散化した方程式が (2.6) 式にあたる。一方、観測データ y_t は国債や社債価格等の金融時系列データであり、それらはファイナンスの理論に基づき $P(t, X_t; T)$ 及び $V(t, X_t; T)$ の関数として表現される理論価格に、誤差を伴い観測されたものとする。さらに $P(t, X_t; T)$ 及び $V(t, X_t; T)$ が X_t の関数であることから、(2.2)、(2.4) 式を通じて X_t と観測データの関係を表した方程式が (2.7) 式にあたる。ここで、 $\lambda(X_t)$ が X_t の関数であることに注意すると、 X_t を推定できれば $\lambda(X_t)$ の推定値が得られることが分かる。従って、誘導型モデルを状態空間表現で捉え直した上で、状態推定を行うことにより、市場価格に基づくインプライド・デフォルト強度を推定することができるのである。特定のモデルに対する具体的な方法は第 4 節で示す。

3. 粒子フィルタ

3.1 アルゴリズム

本節では主に Kitagawa (1996) に従って、次節の実証分析で用いる粒子フィルタについて説明する。粒子フィルタとは、非線形非ガウスの状態空間モデルにおいて状態推定を行う方法の一つであり、以下のような各分布を多数の実現値 (= “粒子”) で近似する。

$$p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(M)} \sim p(x_t | Y_{1:t-1}) \quad \text{予測分布}$$

$$f_t^{(1)}, \dots, f_t^{(M)} \sim p(x_t | Y_{1:t}) \quad \text{フィルタ分布}$$

$$s_{t|T}^{(1)}, \dots, s_{t|T}^{(M)} \sim p(x_t | Y_{1:T}) \quad \text{平滑化分布}$$

ここで $Y_{1:t} := \{y_1, \dots, y_t\}$, M は粒子数である.

粒子フィルタのアルゴリズムは、一期先予測とフィルタの繰り返しで構成されるが、理論の詳細については Kitagawa (1996) を参照されたい. アルゴリズムをまとめると次のようになる.

1. 適当な初期分布 $p_0(x)$ から $j = 1, \dots, M$ について乱数 $f_0^{(j)}$ を生成する.
2. 以下を $t = 1, \dots, T$ について繰り返す.
 - (a) $j = 1, \dots, M$ について $v_t^{(j)} \sim q(v)$ を生成する.
 - (b) $j = 1, \dots, M$ について $p_t^{(j)} = f(f_{t-1}^{(j)}, v_t^{(j)})$ を計算する.
 - (c) $j = 1, \dots, M$ について $\alpha_t^{(j)} = p(y_t | p_t^{(j)})$ を計算する.
 - (d) $j = 1, \dots, M$ について $f_t^{(j)}$ を

$$f_t^{(j)} = \begin{cases} p_t^{(1)} & \text{w.p. } \alpha_t^{(1)} / \sum_{i=1}^M \alpha_t^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ p_t^{(M)} & \text{w.p. } \alpha_t^{(M)} / \sum_{i=1}^M \alpha_t^{(i)} \end{cases}$$

によってリサンプリングする.

粒子フィルタの枠組みではモデルの尤度を簡単に計算することができる. 未知パラメータ θ の尤度は,

$$\begin{aligned} p(y_t | Y_{1:t-1}) &= \int p(y_t | x_t) p(x_t | Y_{1:t-1}) dx_t \\ &\simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(y_t | p_t^{(i)}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_t^{(i)} \end{aligned}$$

に注意すると,

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t | Y_{1:t-1}) \simeq \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{i=1}^M \alpha_t^{(i)} \right) - T \log M. \quad (3.1)$$

として近似される. (3.1) 式を数値的に最大化することで、最尤推定量 $\hat{\theta}$ が求められる. 従って、複数のモデルが候補になっている場合、モデル評価規準の一つである AIC (Akaike (1973)) が容易に計算できる. AIC の定義は

$$AIC = -2l(\hat{\theta}) + 2(\text{パラメータ数})$$

であり、この値が小さいほど相対的に良いモデルであるとされる.

3.2 パラメータ推定法

粒子フィルタによるパラメータ推定については、(3.1) 式を総当りのグリッドサーチにより最大化しようとする、パラメータ数が多いとき、次元の呪いによって実質的に計算が不可能になる。そこで Kitagawa (1998) は次のような推定方法を提案している。Kitagawa (1998) が提案した自己組織化モデルは、 θ を状態変数の中に組み入れて推定する方法である。すなわち、

$$z_t = [x_t, \theta]'$$

として、(2.6), (2.7) 式をそれぞれ

$$\begin{aligned} z_t &= F(z_{t-1}, v_t) = [f(x_{t-1}, v_t; \theta), \theta]' \\ y_t &= H(z_t, w_t) = h(x_t, w_t; \theta) \end{aligned}$$

と考えて状態推定の手続きによってパラメータを推定する。

この手法によると、パラメータのフィルタ分布を表す粒子は一期前の粒子のサブサンプルとなるため、分布を表現する実現値の数は単調に減少し、いずれ一点に縮退してしまう⁸⁾。そこで、パラメータに人工的なノイズ v_{2t} を付加し、 $\theta_t = \theta_{t-1} + v_{2t}$ として、状態変数 $z_t = [x_t, \theta_t]'$ の分布を求める方法が提案されている (Kitagawa (1998), Higuchi and Kitagawa (2000) 等参照)。ただし v_{2t} の適切な選び方は必ずしも明らかではない⁹⁾。実際、本稿の実証分析においては、 v_{2t} の分散の違いにより大きく異なる事後分布を得た。また、比較的多数の粒子 ($M = 10^6$) を用いた場合でも、一部のパラメータに関しては乱数シードの選択に対して不安定な結果となった。そのため本稿のモデルに対しては自己組織化のみを利用することは妥当でないと考えられる。

次に Lin *et al.* (2004) では、Nelder-Mead 法 (Nelder and Mead (1965)。以下、NM 法) を用いて最尤推定値を求めている。NM 法は多変数関数の数値的最適化アルゴリズムであり、その計算には関数の値だけを与えればよく、勾配を必要としないので、(3.1) の最大化に用いることができる¹⁰⁾。本稿の実証分析では、まず自己組織化によって暫定的な推定値を求め、次にその値を NM 法の初期値として最適化の手続を開始することにより、最尤推定値を求めることにした。

パラメータの標準誤差に関しては、粒子フィルタを用いた場合の標準的な方法は確立さ

⁸⁾ 縮退の影響を凌駕するほどの極めて多数の粒子 (10^8) を発生させる方法も Nakamura *et al.* (2009) により提案されている。

⁹⁾ Liu and West (2001) はある程度一般的な形でノイズの与え方を提案している。

¹⁰⁾ Yano (2007) は、自己組織化によって推定するが、その適切な初期分布を NM 法によって探索する方法を提案している。

れていないが、本稿では次のようにする。最尤推定量 $\hat{\theta}$ の漸近分散が情報行列 $I(\theta)$ により

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \approx N(0, I(\theta)^{-1})$$

で近似されると仮定し、 $I(\theta)$ の各要素の推定値を

$$\hat{I}(\hat{\theta})_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(y_t | Y_{t-1}; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p(y_t | Y_{t-1}; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$$

とする（これを外積推定値と呼ぶ）。そして、 $\hat{\theta}$ の周りの数値微分法によって $\hat{I}(\hat{\theta})$ の近似値を計算する。この方法については、補遺において簡単なモデルに対して数値実験を行い、十分大きな粒子数を確保することで妥当な結果を与える可能性が高いことを確認した。

4. 実証分析

4.1 モデル

本稿では、Hull and White (1994, 1997) などにに基づき Takahashi and Sato (2001) で採用された2ファクターモデルに、第3ファクターとして CIR 過程に従うデフォルト強度を加え、それらの相関を考慮したものを推定する。すなわち、状態変数 $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ は

$$\begin{aligned} dX_{1t} &= a(X_{2t} - X_{1t})dt + \sigma_1 dB_{1t} \\ dX_{2t} &= b(\theta_2 - X_{2t})dt + \sigma_{12} dB_{1t} + \sigma_2 dB_{2t} \\ dX_{3t} &= c(\theta_3 - X_{3t})dt + \sigma_3 \sqrt{X_{3t}} \left[\rho dB_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2} dB_{3t} \right] \end{aligned}$$

と表現される。これらはいくまで潜在的な因子であり、その解釈はデータに当てはめて事後的に与えることになるが、事前の想定としては、第1ファクターは短期金利の水準、第2ファクターは長期金利ないしそれに関連する要素の水準を表現し、長短金利差が短期金利の変動に寄与するモデルを考えている。また、短期ファクターと長期ファクター、及び短期ファクターとデフォルト強度の間に相関を許している。

実際の推定においては、粒子フィルタの適用のために、状態変数の過程を離散化する必要がある。離散化の手法は、幅を Δt として、オイラー近似により

$$\begin{aligned} X_{1,t} &= X_{1,t-\Delta t} + a(X_{2,t-\Delta t} - X_{1,t-\Delta t})\Delta t + \sigma_1 v_{1t} \sqrt{\Delta t} \\ X_{2,t} &= X_{2,t-\Delta t} + b(\theta_2 - X_{2,t-\Delta t})\Delta t + (\sigma_{12} v_{1t} + \sigma_2 v_{2t}) \sqrt{\Delta t} \\ X_{3,t} &= X_{3,t-\Delta t} + c(\theta_3 - X_{3,t-\Delta t})\Delta t + \sigma_3 \sqrt{X_{3,t-\Delta t}} \left[\rho v_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2} v_{3t} \right] \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

とする。この関係式をシステム方程式 $X_t = \mathbf{F}(X_{t-\Delta t}, v_t)$ とおく。

次に、状態変数と観測値の関係を与える。短期金利については非線形変換

$$r(X_t) = \begin{cases} X_{1t} & X_{1t} \geq \epsilon \text{ のとき} \\ \epsilon \exp\left\{\frac{X_{1t}-\epsilon}{\epsilon}\right\} & X_{1t} < \epsilon \text{ のとき} \end{cases}$$

により、非負性を保証する。デフォルト強度は第3ファクターそのものであるとモデル化しているので $\lambda(X_t) = X_{3t}$ である。短期金利の変換について、Takahashi and Sato (2001) は定数 $\epsilon = 0.0005$ を置いているが、本稿のデータ期間はゼロ金利政策の期間を含むため、 ϵ の重要性が大きいと考えられる。よってこの値も未知パラメータとして推定する。また、リスクプレミアムはゼロと仮定する。

r 及び λ の過程の定式化とそのパラメータを所与とすると、時刻 t における満期 T のゼロクーポン債価格は X_t の関数となり、

$$P(t, X_t; T) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(X_s) ds \right\} \right] \quad (4.1)$$

である。またゼロクーポン社債価格は前述のように

$$V(t, X_t; T) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T (r + \lambda)(X_s) ds \right\} \right] \quad (4.2)$$

となる。

理論価格 (4.1), (4.2) は直接市場で観測できるデータではないので、観測方程式においては、これらの理論価格の関数として表される観測可能な金融時系列データを利用する。そのようなデータとして LIBOR や金利スワップ、そして普通社債がある。理論価格との関係はファイナンスの無裁定理論に基づき整合的に導出されるものであり、具体的には、満期まで τ_n 期間の LIBOR は

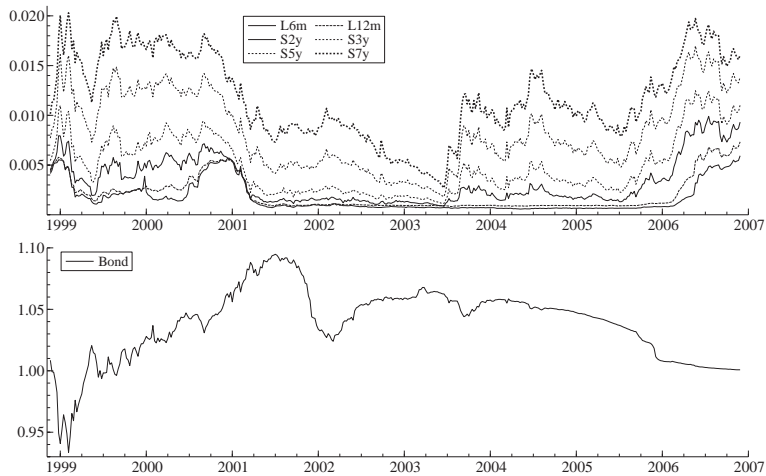
$$L_t(X_t, \tau_n) = \left(\frac{1}{P(t, X_t; t + \tau_n)} - 1 \right) \frac{1}{\tau_n}$$

で求められる。また満期まで τ_n 期間で間隔 δ でキャッシュフローの発生するスワップの金利は

$$S_t(X_t, \tau_n) = \frac{1 - P(t, X_t; t + \tau_n)}{\delta \sum_{i=1}^{\tau_n/\delta} P(t, X_t; t + i\delta)}$$

となる (Björk (2004) 等参照)。さらに、額面 1、満期 T で、将来の利払い日 t_j において固定金利 C を支払う社債の理論価格を $V_t(X_t, T, C, \{t_j\})$ と表記すると、その価格は次のように表現される。

$$V_t(X_t, T, C, \{t_j\}) = C \sum_j V(t, X_t; t_j) + V(t, X_t; T).$$



注) 6 ヶ月, 12 ヶ月 LIBOR を L6m, L12m と表し, 2, 3, 5, 7 年物スワップ金利を S2y, S3y, S5y, S7y と表している。また Bond は額面 1 円に対する社債価格である。

図1 LIBOR とスワップ金利 (上), 日本航空の普通社債価格 (下)。

本稿では LIBOR は 6 ヶ月と 12 ヶ月, 円スワップは 2, 3, 5, 7 年物を用いる。以上をまとめて, 7次元の観測ベクトル Y_t を

$$Y_{n,t} = \begin{cases} L_t(X_t, \tau_n) + u_{n,t}, & n = 1, 2, \\ S_t(X_t, \tau_n) + u_{n,t}, & n = 3, \dots, 6, \\ V_t(X_t, T, C, \{t_j\}) + u_{n,t}, & n = 7 \end{cases} \quad (4.3)$$

とする。ここで $(\tau_1, \dots, \tau_6) = (0.5, 1, 2, 3, 5, 7)$ である。また, $u_{n,t}$ は互いに独立な正規ノイズを仮定し, その分散共分散行列を $\Sigma_u = \text{diag}(\sigma_{u1}^2, \dots, \sigma_{u7}^2)$ とおく¹¹⁾。状態空間表現としては (4.3) 式が観測方程式であり, $Y_t = \mathbf{H}(X_t) + u_t$ と表す。

パラメータをまとめると $\theta = (a, b, c, \theta_2, \theta_3, \sigma_1, \sigma_{12}, \sigma_2, \sigma_3, \rho, \epsilon, \Sigma_u)$ の 18 個となる。

4.2 データ

実証分析は, 日本航空が 1996 年に発行し 2006 年 12 月 6 日に満期を迎える年利率 2.9% の固定利付普通社債を対象にして行う。この社債の額面 1 円あたりの価格を Y_{7t} とする。また前述のように 6 ヶ月及び 12 ヶ月の円 LIBOR と, 2, 3, 5, 7 年物の円スワップ金利も観測データとする。期間と観測頻度は 1998 年 11 月から 2006 年 11 月までの 418 時点の週次データである¹²⁾。図 1 に利用するデータの時系列を示す。

¹¹⁾ ノイズの形状は本分析においては相対的に重要性が低いことから, 計算負荷を考慮し, 対角とする。

¹²⁾ データベースは Datastream と Bloomberg を利用した。

4.3 推定の方法

上記のモデルの推定は、状態空間モデル

$$X_t = \mathbf{F}(X_{t-\Delta t}, v_t)$$

$$Y_t = \mathbf{H}(X_t) + u_t$$

において、フィルタリングを行うことに相当する。粒子フィルタによる具体的な推定方法は次のようになる。なお、分析対象の期間を $[0, T^*]$ とおく。

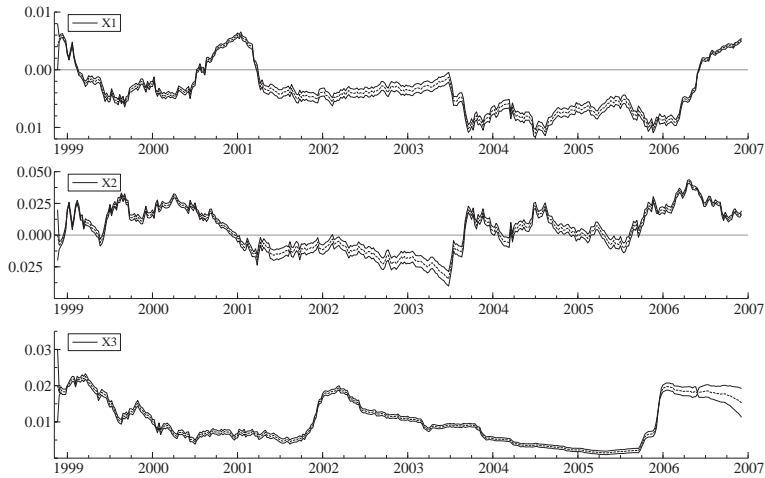
1. 適当な 3 次元初期分布 $p_0(x)$ から $j = 1, \dots, M$ について乱数 $f_0^{(j)}$ を生成する。
2. 以下を各観測時点 $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots, T^* - \Delta t, T^*$ について繰り返す。
 - (a) $j = 1, \dots, M$ について、システムノイズ $v_t^{(j)}$ を 3 次元標準正規分布 $N_3(0, I)$ から発生させる。
 - (b) $j = 1, \dots, M$ について、 $p_t^{(j)} = \mathbf{F}(f_{t-\Delta t}^{(j)}, v_t^{(j)})$ を計算する。
 - (c) $j = 1, \dots, M$ について、7 次元正規分布 $N_7(0, \Sigma_u)$ の密度関数を $Y_t - \mathbf{H}(p_t^{(j)})$ の点で評価した値を $\alpha_t^{(j)}$ とする。ここで $\mathbf{H}(p_t^{(j)})$ の計算に必要な $P(t, p_t^{(j)}; \cdot)$ 及び $V(t, p_t^{(j)}; \cdot)$ の期待値が解析的に求められないモデルなので、各 $p_t^{(j)}$ から発生させた J 本の標本経路によるモンテカルロ積分で求める¹³⁾。
 - (d) $j = 1, \dots, M$ について $f_t^{(j)}$ を $\alpha_t^{(j)}$ の比率に応じてリサンプリングする。これによって得られた粒子の分布が、時刻 t までの観測値に基づいて推定された状態変数のフィルタ分布である。

以上が粒子フィルタの 1 反復である。パラメータ推定のためには、次のような手順で、フィルタリングを繰り返す¹⁴⁾。

1. 先行研究を参考にパラメータの初期分布を定め、自己組織化によりフィルタリングを行う。
2. 手順 1 で求めた各時点のパラメータのフィルタ分布の平均値を、全期間に渡って平均したものを暫定的な推定値とする。その値を初期分布の中心として、再び自己組織化を行う。これを何度か繰り返す。
3. 手順 2 の推定値を初期分布とし、粒子数を十分増やして自己組織化を 1 反復行う。

¹³⁾ モンテカルロ積分の方法は、Takahashi and Sato (2001) または 高橋・佐藤 (2002) と同様である。

¹⁴⁾ 実際にはパラメータ数が多いため、月次データを用いて予備的に推定する、一部のみを自己組織化で推定する等、問題を適当に分割しながら進めていく。



注) 3本の線は平均と $\pm 2\sigma$ 範囲である。

図2 各ファクターのフィルタ分布。

4. 手順3で得られたパラメータの終端分布の平均を初期値として、NM法を開始する。
5. NM法は尤度の改善幅が十分小さくなったら収束したとみなす。局所最適に陥る可能性があること、及びモンテカルロ誤差を伴うことから、収束地点からNM法を再出発させること等を何度か繰り返し、最終的な推定値を探索する。

粒子数と標本経路数は、計算量と精度のバランスを考慮して、 $(M, J) = (5000, 20)$ 程度から始め、次第に精度を向上させ、手順5では $(50000, 100)$ とした。

最尤推定値を確定させたら、前述の数値微分の方法により漸近標準誤差を求める。ここでは $(M, J) = (5 \times 10^5, 300)$ とした。

計算には統計数理研究所のPRIMERGY RX200S5スーパーコンピュータシステムを利用した¹⁵⁾。

4.4 結果と考察

各ファクターのフィルタ分布を図2に示す。第1ファクターは6ヶ月LIBORとある程度近い動きをしており、またモデルの設定からも短期金利ファクターと考えられる(図3, 左)。第2ファクターは5年または7年のスワップ金利と非常に良く似た動きをしており、長期金利の水準を表すものと解釈できる(図3, 右)。

デフォルト強度に関しては、図2の推定値と図1の価格系列を比較してみると、合理的な結果を得ているものと思われる。強度の水準の挙動には、上昇するときには急激に、下

¹⁵⁾ 計算負荷の大きい一部の計算については家庭用コンピュータにてOx 5.10及びOxMPIを利用した(OxについてはDoornik(2007)を参照されたい)。

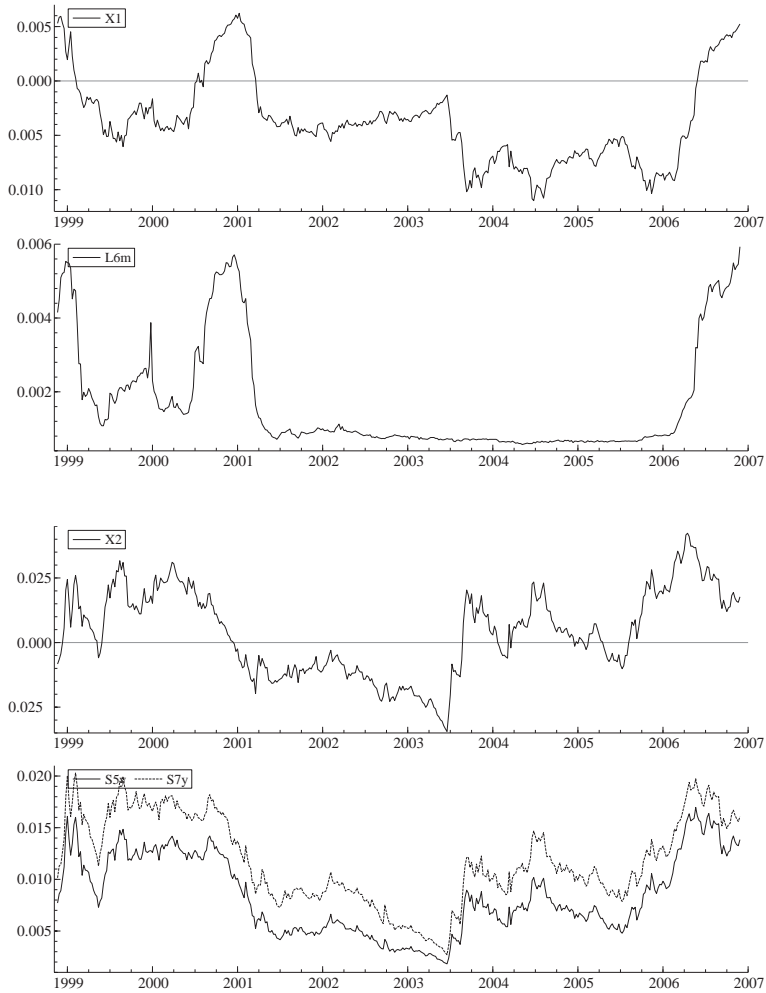


図3 第1ファクターと6ヶ月LIBOR(上), 第2ファクターの5年・7年スワップ金利(下).

降時は緩やかに動くという非対称性が観察される。2001年10月頃から強い上昇傾向が見られるが、この間、11月には日本航空と日本エアシステムの経営統合が報じられ¹⁶⁾、また、2002年3月期の決算見通しが400億円の赤字と発表されており¹⁷⁾、これらの情報が何らかの影響を与えている可能性がある。

また、パラメータの推定結果を表1に示す。1行目が推定値、2行目が前述の方法で求めた $\hat{I}(\hat{\theta})^{-1/2}$ の対角成分、3行目はそれをデータ数の平方根 $\sqrt{418}$ で除した標準誤差である。非線形変換パラメータ ϵ の推定値は0.0056であり、先行研究の定数値とは大きく異なる。

16) 『日本経済新聞』2001年11月11日。

17) 『日本経済新聞』2001年11月16日。

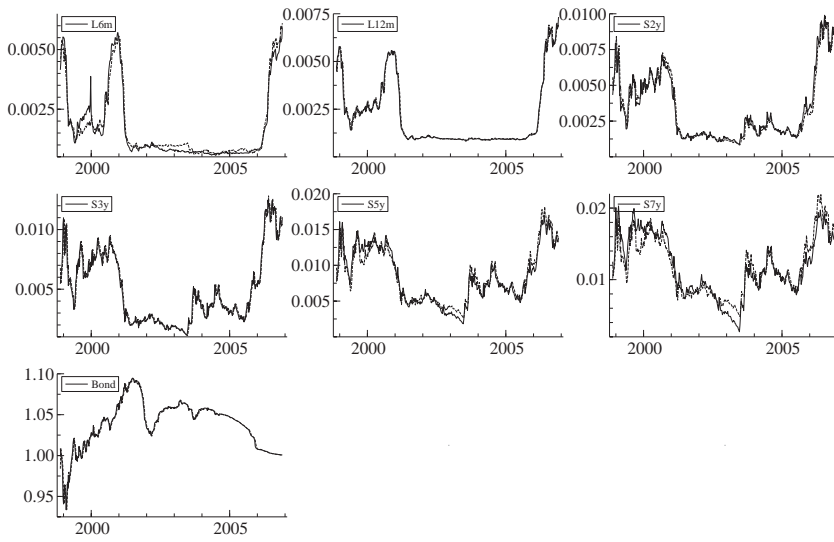


図4 観測値(実線)と推定値(破線).

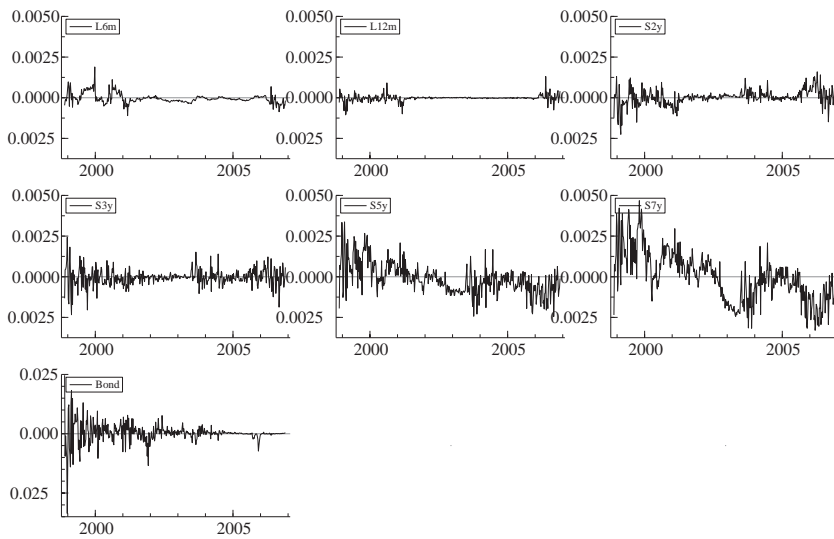


図5 推定誤差.

表 1 パラメータ推定値と漸近標準誤差.

a	b	c	θ_2	θ_3		
0.29	0.18	0.077	0.039	0.011		
0.29	0.25	0.058	0.024	0.020		
(0.014)	(0.012)	(0.0028)	(0.0012)	(0.00098)		
σ_1	σ_{12}	σ_2	σ_3	ρ	ϵ	
0.0049	-0.018	0.025	0.051	0.0052	0.0056	
0.0048	0.032	0.014	0.036	0.54	0.0047	
(0.00023)	(0.0017)	(0.00068)	(0.0018)	(0.026)	(0.00023)	
σ_{u1}	σ_{u2}	σ_{u3}	σ_{u4}	σ_{u5}	σ_{u6}	σ_{u7}
0.00025	0.000023	0.00022	0.00011	0.00073	0.0014	0.00049
0.000077	0.000024	0.00014	0.00013	0.00057	0.0012	0.00057
(0.38) [†]	(0.12) [†]	(0.68) [†]	(0.64) [†]	(2.8) [†]	(5.9) [†]	(2.8) [†]

注) 1 行目は最尤推定量, 2 行目は $\hat{I}(\hat{\theta})^{-1/2}$ の対角成分, 3 行目は漸近的な標準誤差.

[†]) 第 3 セルの 3 行目は各々 10^{-5} を乗じる.

よってゼロ金利期間を含む分析では推定対象に含めるべきである. 第 1 ファクターと第 2 ファクターの間には負の相関が見られるが, 第 1 ファクターとデフォルト強度との相関 ρ については, 推定値の中で唯一有意ではなく, 本分析では検出されなかった. 第 2 ファクターの長期的期待値 θ_2 の推定値 0.039 は, 推定された X_{2t} の大部分より上になっているが, 考えられる原因としてはリスクプレミアムをゼロとした仮定に問題があった可能性があり, 今後の検討課題である.

最後に, 推定されたファクターの金利と債券価格に対する説明力を見る. 図 4 は, 一期先予測の推定値と観測値をプロットしたものであり, 図 5 は観測値から推定値を引いた残差である. 観測値は概ね理論値に沿って変動しているが, 長期の金利ほど乖離が大きい傾向にある. 社債については, 満期まで遠く, 価格変動が大きい期間に, 誤差が大きくなっている.

5. まとめ

誘導型信用リスク・モデルにおいて, 状態変数の確率過程と金利データの関係を一般化状態空間モデルとして表現し, 粒子フィルタを用いることで, 社債価格に基づくインプライド・デフォルト強度を金利ファクターと同時に推定する方法を示した. その上で, 固定利付普通社債に対して実証分析を行い, 金利ファクターやデフォルト強度の推定に関して合理的と思われる結果を得た.

パラメータの推定および標準誤差の評価については, 補遺で述べた実験の結果等から妥当性は高いと思われるものの, 漸近正規性が成立する論理的な保証が与えられていない,

モンテカルロ誤差の評価が限定的である，等の点で改善の余地が多い．特に，本稿で利用したモデルの推定法は，粒子ごとの尤度の計算¹⁸⁾に計算量の大部分を費やすが，このような特性を持つモデルに対しても精度良く推定できる方法の開発が今後の課題である．

謝辞

本研究を進めるにあたって国友直人教授（東京大学）に大変お世話になった．また，高橋明彦教授（同）・佐藤整尚准教授（統計数理研究所）・広瀬光久氏（みずほコーポレート銀行）から有益な助言を頂いた．計盛英一郎リサーチフェロー（東京大学）からはデータベースの取り扱いに関する支援を受けた．2名の匿名査読者から多くの貴重なコメントを頂き，草稿は大幅に改善した．青嶋誠編集委員長には多大なご尽力を頂いた．ここに記して感謝したい．なお，本研究は科研費（22・9712）の助成を受けた．また，本研究におけるスーパーコンピュータシステムの利用は，統計数理研究所共同研究プログラム（22－共研－0010）に基づくものである．

A. 補遺

A.1 情報行列の推定について

本稿ではパラメータ推定量の漸近標準誤差を，数値微分を用いて評価した情報行列に基づき計算している．この情報行列はデータから外積推定値により推定することにしており，さらに，この外積推定値は粒子フィルタにおける対数尤度関数の数値微分に基づいている．よって，近似誤差及び数値微分による誤差，そしてその微分値に関するモンテカルロ誤差が生じることになるが，そのような複合的な誤差の影響は自明ではない．そこで本節では，簡単なモデルにおいて実験を行い，数値微分による方法の妥当性を考察する．

実験では，次の「AR(1) + ノイズ」モデルにおけるパラメータ ϕ ($|\phi| < 1$) の推定問題を考える．

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + \zeta_t, & \zeta_t &\sim i.i.d. N(0, 1), \\ Y_t &= X_t + \eta_t, & \eta_t &\sim i.i.d. N(0, 1), \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

まず，目標となる $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$ の統計量を，シミュレーションデータの平均及び分散に基づき次のようにして用意する．全期間の観測データを $\mathbf{Y} := \{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ とおき， k 回目のシミュレーションで発生させたデータを $\mathbf{Y}^{(k)}$ ， $k = 1, \dots, K$ とする．またデータ $\mathbf{Y}^{(k)}$ から得られる最尤推定値を $\hat{\phi}^{(k)}$ とおく．このモデルでは，カルマン・フィルタにより，あるパラメータ値に対する対数尤度及びその一階微分が解析的に計算されるので，発生させ

¹⁸⁾ 3.1 節および 4.3 節の手順 2.(c) のこと．

表 A1 実験結果. (A) 各 ϕ, T に対する $\hat{\phi}$ の統計量; (B) 解析的な外積推定値に基づく標準誤差; (C) 数値微分による標準誤差.

ϕ	0				0.3				0.5				0.7			
	100	200	400	1000	100	200	400	1000	100	200	400	1000	100	200	400	1000
(A)	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.27	0.28	0.29	0.30	0.47	0.48	0.49	0.50	0.67	0.69	0.69	0.70
	0.00	0.00	-0.01	-0.00	-0.28	-0.21	-0.16	-0.10	-0.32	-0.23	-0.16	-0.10	-0.29	-0.20	-0.14	-0.08
	1.80	1.89	1.94	1.97	1.65	1.68	1.67	1.67	1.37	1.33	1.30	1.28	0.98	0.93	0.90	0.88
(B)	2.02	2.01	2.00	2.00	1.78	1.73	1.70	1.69	1.40	1.34	1.30	1.28	0.97	0.92	0.89	0.88
	(0.38)	(0.26)	(0.18)	(0.11)	(0.40)	(0.28)	(0.20)	(0.13)	(0.36)	(0.24)	(0.17)	(0.10)	(0.26)	(0.16)	(0.11)	(0.07)
(C)	1.61	1.60	1.57	1.58	1.29	1.34	1.40	1.44	1.29	1.27	1.24	1.23	0.96	0.91	0.88	0.87
	(0.30)	(0.22)	(0.15)	(0.11)	(0.42)	(0.32)	(0.18)	(0.10)	(0.29)	(0.20)	(0.14)	(0.09)	(0.24)	(0.16)	(0.11)	(0.07)
$M = 20000$	1.90	1.87	1.86	1.86	1.51	1.55	1.60	1.61	1.35	1.33	1.28	1.27	0.97	0.92	0.89	0.88
	(0.37)	(0.24)	(0.17)	(0.11)	(0.40)	(0.31)	(0.18)	(0.11)	(0.32)	(0.23)	(0.16)	(0.10)	(0.25)	(0.16)	(0.11)	(0.07)

注 1) 横軸は (A)-(C) に共通であり, 真の値 ϕ の違いで 4 分割した上で, その各々の中で, T の各場合の結果を並べている.

注 2) (B),(C) は, $\left\{ \hat{I}(\hat{\phi}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \right\}_{k=1}^K$ に関して上段が平均, 下段 (括弧付き) が標準偏差である.

た $\mathbf{Y}^{(k)}$ に対して、対数尤度を数値的に最適化することで $\hat{\phi}^{(k)}$ を導出することができる。この作業を K 回繰り返して得た $\{\hat{\phi}^{(k)}\}_{k=1}^K$ から、 $\hat{\phi}$ の平均等を計算する。真のパラメータが $\phi = 0, 0.3, 0.5, 0.7$ のときの結果を表 A1(A) に示す。各セルの 1 行目は $\hat{\phi}$ の平均、2 行目は $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$ の平均、3 行目は $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi)$ の標準偏差の値である。 $K = 10^5$ とした。この表の各セル 3 行目の値（太字で強調）が、近似すべき目標の値である。

次に、情報行列の外積推定値に基づく標準誤差を求める。すなわち、解析的に求める外積推定値を $\hat{I}(\phi)$ とおくと、各 k において $\hat{\phi}^{(k)}$ における外積推定値 $\hat{I}(\hat{\phi}^{(k)})$ を求め、 $\left\{ \hat{I}(\hat{\phi}^{(k)})^{-\frac{1}{2}} \right\}_{k=1}^K$ に関する平均・標準偏差を計算したものが表 A1(B) である。これによると、 T の増加に従って精度が向上しているが、 $T = 100$ でも十分良い近似を与えていることが確認できる。

最後に、粒子フィルタにおける対数尤度の数値微分¹⁹⁾を用いた場合の標準誤差を、同様にして求める（ただし $K = 2000$ ）。粒子数の影響を見るため、 $M = 5000, 20000$ の 2 通りについて計算している。表 A1(C) の結果によると、ほぼ全てのセルで解析的標準誤差に対して過少に推定する傾向がみられるが、粒子を増やす事で乖離は小さくなっている。従って十分に大きい粒子数を確保すれば、数値微分の方法によって標準誤差の十分な近似を得られることが示唆される。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, *2nd International Symposium on Information Theory* (eds. B. N. Petrov and F. Csáki), pp. 267–281, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time, 2nd ed.*, Oxford University Press.
- Chen, R. and Scott, L. (2003). Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure, *J. Real Estate Financ. Econ.*, **27**(2), 143–172.
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, **53**, 385–408.
- Doornik, J. A. (2007). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox, 3rd ed.*, London, Timberlake Consultants Press and Oxford.
- Duffee, G. R. (1999). Estimating the Price of Default Risk, *The Review of Financial Studies*, **12**(11), 197–226.
- Duffie, D. and Singleton, K. J. (1999). Modeling Term Structures of Defaultable Bonds, *The Review of Financial Studies*, **12**(4), 687–720.
- Higuchi, T. and Kitagawa, G. (2000). Knowledge Discovery and Self-Organizing State Space Model, *IEICE Transactions on Information and Systems*, **E83-D**(1), 36–43.
- Hull, J. and White, A. (1994). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, *J. Deriv.*, **2**, 37–48.
- Hull, J. and White, A. (1997). Taking Rates to the Limits, *Risk*, December, 168–169.
- Kitagawa, G. (1996). Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models, *J. Comput. Graph. Stat.*, **5**(1), 1–25.
- Kitagawa, G. (1998). A Self-Organizing State-Space Model, *J. Am. Stat. Assoc.*, **93**, 1203–1215.
- 楠岡 成雄, 青沼 君明, 中川 秀敏 (2001). 『クレジット・リスク・モデル — 評価モデルの実用化とクレジット・デフィバティブへの応用 —』 金融財政事情研究会.

¹⁹⁾ 数値微分計算における差分はパラメータ推定値の $\pm 10\%$ とした。ただし $\phi = 0$ のときは ± 0.05 とした。

- Lando, D. (2004). *Credit Risk Modeling: Theory and Applications*, Princeton University Press.
- Lin, J. Y., Wu, Y. and Huang, T. S. (2004). 3D model-based hand tracking using stochastic direct search method, *Proceedings of Sixth IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*, 693–698.
- Liu, J. and West, M. (2001). Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (eds. A. Doucet, N. de Freitas and N. Gordon), pp. 197–223, Springer-Verlag New York.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press. (塚原 英敦, 小林 俊, 三浦 良造, 川崎 能典, 山内 浩嗣, 中川 秀敏共訳 (2008). 『定量的リスク管理 —基礎概念と数理技法—』 共立出版.)
- Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, **29**(2), 449–470.
- 中川 秀敏 (2008). 「信用リスク・モデルの観望とその新展開 —トップダウン・アプローチによるデフォルトの依存関係のモデル化—」『現代ファイナンス』**23**, 3–33.
- Nakamura, K., Yoshida, R., Nagasaki, M., Miyano, S. and Higuchi, T. (2009). Parameter Estimation of in silico Biological Pathways with Particle Filtering towards a Petascale Computing, *The Proceedings of 14th Pacific Symposium on Biocomputing*, 227–238.
- Nelder, J. A. and Mead, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal*, **7**, 308–313.
- Schönbucher, P. J. (2003). *Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*, Wiley.
- Takahashi, A. and Sato, S. (2001). A Monte Carlo Filtering Approach for Estimating the Term Structure of Interest Rates, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **53**(1), 50–62.
- 高橋 明彦, 佐藤 整尚 (2002). 「モンテカルロフィルタを用いた金利モデルの推定」『統計数理』**50**(2), 133–147.
- Yano, K. (2007). A Self-organizing State Space Model and Simplex Initial Distribution Search, *Comp. Stat.*, **22**, 197–216.
- Zhou, Y., Qin, X., Shang, Q. and Liu, Z. (2008). Reduced Credit Risk Measurement Model with Particle Filter Approach, *3rd IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, 203–207.